С.Сейфуллиннің 120 жылдығына арналған **«Сейфуллин оқулары–10: Мемлекеттің индустриалды–инновациялық саясатын құрудағы бәсекеге қабілетті кадрларды дайындау келешегі мен ғылымның рөлі»** атты Халықаралық ғылыми-теориялық конференциясының материалдары = Материалы Международной научно-теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения–10: Новые перспективы подготовки конкурентоспособных кадров и роль науки в формировании индустриально-инновационной политики страны»,** посвященная 120-летию со дня рождения С.Сейфуллина. – 2014. – Т.I, ч.3. – С.147-149

О ДВУМЕРНОМ КРАТНОМАСШТАБНОМ АНАЛИЗЕ ТЕОРИИ ВЕЙВЛЕТОВ

Адилханов А.Н.,Кенжебекова Г.С.,Муканов Ж.Б.

Вейвлет-анализ - это современный и перспективный метод обработки данных. Мультиразрешающая аппроксимация сигнала представляет собой последовательность подпространств, которые удовлетворяют некоторым аксиомам отделимости и полноты.

В данной работе рассматривается метод построения вейвлет базисов с помощью кратномасштабного анализа. Необходимые сведения по вейвлет анализу можно найти в [1], [2].

Методы вейвлет-анализа возможно применить к данным различной природы. Получить набор вейвлет-коэффициентов и классификацию вейвлет-алгоритмов можно сделать, выделив непрерывное в случае дискретного преобразования быстрее, и он дает достаточно точное представление о сигнале при меньшем объеме получаемых в результате данных. Непрерывное преобразование требует бóльших вычислительных затрат, но, вместе с этим, позволяет детальнее рассмотреть структуру сигнала.

Выбор того или иного метода зависит от поставленной задачи и типа имеющихся данных, которые необходимо обработать, от возможностей вычислительной техники и от того, в каком виде необходимо представить результат.

При цифровой обработке временного сигнала вычисляются и хранятся только значения вейвлет-преобразования. Если сигнал обладает хорошими свойствами на больших участках временной оси, то в этом случае коэффициенты вейвлет-преобразования в большей части становятся столь малыми, что их можно приравнять к 0, Поэтому можно достигнуть определенной скорости сжатия данных, т.к. только те коэффициенты, абсолютная величина которых превосходит некоторый порог, учитываются, потом сохраняются и впоследствии используются в восстановлении сигнала. Этих коэффициентов вполне достаточно для восстановления исходного сигнала с требуемой точностью.

Один из способов построения двумерного кратномасштабного анализа, это представление каждого пространства V_{2^j}, как тензорного произведения двух одинаковых подпространств

$$L^2(R),\ V_{2^j} = V^1_{2^j} \otimes V^1_{2^j}.$$

Последовательность векторных пространств V_{2^j} образует кратномасштабный анализ $L^2(R^2)$, если и только если V_j является кратномасштабным анализом в $L^2(R)$. В этом случае масштабирующая функция может быть записана в виде

$$\Phi(x,y)=\phi(x)\phi(y),$$

где $\phi(x)$ является одномерной масштабирующей функцией кратномасштабного анализа в $\left(V^1_{2^j}\right)_{j\in Z}$. Ортогональный базис V_{2^j} при этом записывается в виде

$$\left(2^{-j}\Phi_{2^j}\left(x-2^{-j}n,\, y-2^{-j}m\right)\right)_{(n\,m)\in Z^2}=\left(2^{-j}\phi_{2^j}\left(x-2^{-j}n\right)\phi_{2^j}\left(y-2^{-j}m\right)\right)_{(n\,m)\in Z^2}.$$

Теорема. Пусть $\left(V_{2^j}\right)_{j\in Z}$ - кратномасштабный анализ в $L^2\left(R^2\right)$. Пусть $\Phi(x,y)=\phi(x)\phi(y)$ - соответствующая анализу двумерная масштабирующая функция. Пусть $\psi(x)$ - одномерный вейвлет, соответствующий масштабирующей функции $\phi(x)$. Тогда три вейвлета
$\Psi^1(x,y)=\phi(x)\psi(y),\quad \Psi^2(x,y)=\psi(x)\phi(y),\quad \Psi^3(x,y)=\psi(x)\psi(y),$
являются такими, что

$$\begin{pmatrix} 2^{-j}\,\Psi^1_{2^j}\left(x-2^{-j}n,\, y-2^{-j}m\right), \\ 2^{-j}\,\Psi^2_{2^j}\left(x-2^{-j}n,\, y-2^{-j}m\right), \\ 2^{-j}\,\Psi^3_{2^j}\left(x-2^{-j}n,\, y-2^{-j}m\right), \end{pmatrix}_{(n,m)\in Z^2}$$

образуют ортонормированный базис в W_{2^j} и

$$\begin{pmatrix} 2^{-j}\,\Psi^1_{2^j}\left(x-2^{-j}n,\, y-2^{-j}m\right), \\ 2^{-j}\,\Psi^2_{2^j}\left(x-2^{-j}n,\, y-2^{-j}m\right), \\ 2^{-j}\,\Psi^3_{2^j}\left(x-2^{-j}n,\, y-2^{-j}m\right), \end{pmatrix}_{(n,m,j)\in Z^2}$$

образуют ортонормированный базис в $L^2\left(R^2\right)$.

Пусть дана масштабирующая функция $\phi(x)$ и $h_k \in l$, такой что

$$\phi(t-l)=\sqrt{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k\phi_{-1,k+2l}\in V_{-1}\qquad \forall l\in Z.$$

На основе масштабирующей функции и вектора $h_k \in l$ можно построить вейвлет $\psi(x)$, такой что:

$$\psi(t-l)=\sqrt{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}g_k\phi_{-1,k+2l}\in V_{-1}\qquad \forall l\in Z$$

где $g_k = (-1)^{k-1} h_{-k-1}$. Далее, можно построить двумерную масштабирующую функцию

$$\left(2^{-j}\Phi_{2^j}\left(x-2^{-j}n,\, y-2^{-j}m\right)\right)_{(n\,m)\in Z^2} = \left(2^{-j}\phi_{2^j}\left(x-2^{-j}n\right)\phi_{2^j}\left(y-2^{-j}m\right)\right)_{(n\,m)\in Z^2}$$

и три базисных вейвлета

$$\Psi^1(x,y)=\phi(x)\psi(y),\qquad \Psi^2(x,y)=\psi(x)\phi(y),\qquad \Psi^3(x,y)=\psi(x)\psi(y),$$

$$\Phi_{2^j}(x-l,\, y-m)=\sqrt{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k\phi_{-1,k+2l}(x)\cdot\sqrt{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h_m\phi_{-1,m+2l}(y)=$$

$$2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h_m h_k\phi_{-1,k+2l}(x)\cdot\phi_{-1,m+2l}(y)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h_{km}\phi_{-1,k+2l}(x)\cdot\phi_{-1,m+2l}(y)$$

где $h_{km} = h_k \cdot h_m$.

Нами построено двумерное вейвлет преобразование на основе одномерного вейвлета Хаара. В этом случае масштабирующая функция имеет вид:

$$\phi(x,\ y)=\begin{cases}1, & x\in[0,1],\ \ y\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1],\ \ y\notin[0,1]\end{cases}.$$

Кроме того алгоритм быстрого вейвлет преобразования распространяется на двумерный случай.

Список литературы

1. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. Изд-во: Мир, - Москва, 2005. – 671 с.
2. Блаттер К. Вейвлет анализ. Изд-во: Техносфера, - Москва, 2004. – 273 с.