С.Сейфуллиннің 120 жылдығына арналған **«Сейфуллин оқулары–10: Мемлекеттің индустриалды–инновациялық саясатын құрудағы бәсекеге қабілетті кадрларды дайындау келешегі мен ғылымның рөлі»** атты Халықаралық ғылыми-теориялық конференциясының материалдары = Материалы Международной научно-теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения–10: Новые перспективы подготовки конкурентоспособных кадров и роль науки в формировании индустриально-инновационной политики страны»,** посвященная 120-летию со дня рождения С.Сейфуллина**.** – 2014. – Т.I, ч.3. – С.149-151

О ВЗАИМОСВЯЗИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С СИЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ РЯДАМИ ФУРЬЕ

Байтуякова Ж.Ж.

Пусть $f(x_1,x_2)$ нечетная, непрерывная и 2π периодическая по каждой переменной функция, $f\subset C_{2\pi\times 2\pi}$, и пусть

$$f(x_1,x_2)\sim\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}b_{n_1,n_2}sinn_1x_1sinn_2x_2 \qquad (1)$$

ее ряд Фурье. Через $S_{n_1,n_2}=S_{n_1,n_2}(x_1,x_2)=S_{n_1,n_2}(f,x_1,x_2)$ обозначим частичную сумму порядка n_1,n_2 ряда (1).

Пусть $\{\lambda_{n_1,m_2}\}$ последовательность положительных чисел и пусть

$$\Lambda_{n_1,n_2}=\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\lambda_{\nu_1,\nu_2}$$

Через $\|\cdot\|$ обозначим обычную супремум норму, и $f^{(r_1,r_2)}=f^{(r_1,r_2)}(x_1,x_2)$ r_1,r_2 производные функции f.

Пусть $\omega(\delta_1,\delta_2)$ неубывающая, непрерывная функция квадрате $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ со свойствами $\omega(0,0)=0,\omega(\delta_1+\delta_2)\le\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2)$ для всех $0\le\delta_1\le\delta_2\le\delta_1+\delta_2\le 2\pi$. $\omega(\delta)$ модуль непрерывности. Модуль непрерывность функций f обозначим через $\omega(f,\delta_1,\delta_2)=\sup_{0\le h_1\le\delta_1,0\le h_2\le\delta_2}\|f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)\|$.

Через H^{ω} обозначим класс функций $f\in C_{2\pi\times 2\pi}$ для которых
$\omega(f,\delta_1,\delta_2)=O\,\omega(\delta_1,\delta_2)$

Пусть $\gamma=\{\gamma_{n_1,n_2}\}$ - положительная последовательность.

Пусть $c-\{c_{n_1,m_2}\}-(c_{n_1,n_2}\to 0,n_1\to 0,n_2\to 0)$ ноль последовательность действительных чисел удовлетворяющая условию

$$\sum_{n_1=m_1}^{\infty}\sum_{n_2=m_2}^{\infty}\left|\Delta_{11}c_{n_1,n_2}\right|\le K(c)\gamma_{m_1,m_2}$$

(где $\Delta_{11}=\Delta_{10}(\Delta_{01}b_{n_1,n_2}),\quad \Delta_{10}b_{n_1,n_2}=b_{n_1,n_2}-b_{n_1+1,n_2},\Delta_{01}b_{n_1,n_2}=b_{n_1,n_2}-b_{n_1,n_2+1}$
где $K(c)$ константа. Такие последовательности называются последовательностью -остаточной ограниченной вариации и обозначим $c\in\gamma RBVS^2$.

Если в (2) $\gamma_{m_1,m_2}=|c_{m_1,m_2}|$, где c называется только последовательность ограниченной вариации $c\in RBVS^2$. Если

$$\gamma_{m_1,m_2}=\frac{1}{m_1,m_2}\sum_{\nu_1=m_1}^{2m_1-1}\sum_{\nu_2=m_2}^{2m_2-1}\left|c_{\nu_1,\nu_2}\right|$$

тогда это последовательность c называется последовательностью средней остаточной ограниченной вариации, и обозначим $c\in MRBVS^2$.

Последовательность $\gamma=\{\gamma_{n_1,n_2}\}$ положительных чисел называется почти неубывающей (почти возрастающей), если существует константа $K=K(\gamma)\ge 1$ такая, что для всех $n_1\ge m_1,n_2\ge m_2$ выполняется
$K\gamma_{n_1,n_2}>\gamma_{m_1,m_2}\quad(\gamma_{n_1,n_2}<K\gamma_{m_1,m_2})$

Определим некоторые классы функций

$$W^{r_1,r_2}H_s^{\omega} = \left\{ f \in C_{2\pi\times 2\pi} : f = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} b_{n_1,n_2} \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2, \quad \{b_{n_1,n_2}\} \in RBVS^2 \text{ и } \omega(f^{(r_1,r_2)}, \delta_1, \delta_2) = O(\omega(\delta_1,\delta_2)) \right\}$$

и

$$H(\lambda_1,\lambda_2,p,r_1,r_2,\omega) = \left\{ f \in C_{2\pi\times 2\pi} : h_n(f,\lambda_1,\lambda_2,p) = O(n_1^{-r_1+1-\delta_1} n_2^{-r_2+1-\delta_2})\omega\left(\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right) \right\}$$

Теорема. Пусть $p > 1$, $r_1, r_2 \geq 0$ четные целые числа, $0 < \delta_1 \leq 1, 0 < \delta_2 \leq 1$ и $\omega(\delta_1,\delta_2)$ модуль непрерывности. Пусть последовательность

$$\left\{ \Lambda_{n_1,n_2} n_1^{-pr_1} n_2^{-pr_2} \omega\left(\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right)^p \right\}$$

почти неубывает и

$$\Lambda_{2n_1,2n_2} \leq K\Lambda_{n_1,n_2}, \quad \forall n_1, n_2 \in N$$

Тогда имеет место вложение

$$W^{r_1,r_2}H_{s,M}^{\omega} \subset H(\lambda_1,\lambda_2,p,\delta_1,\delta_2,\omega).$$

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

Лемма1. Если $b_{n_1,n_2} \geq 0$ и функция

$$f(x_1,x_2) \sim \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} b_{n_1,n_2} \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2$$

принадлежит классу H^{ω}, то имеет место неравенство

$$\sum_{n_1=1}^{m_1}\sum_{n_2=1}^{m_2} n_1 n_2 b_{n_1,n_2} \ll m_1 m_2 \omega\left(\frac{1}{m_1},\frac{1}{m_2}\right) \qquad (3)$$

Лемма2. Пусть $\{b_{n_1,n_2}\} \in MRBVS^2$ и выполняется неравенство

$$\left| \sum_{n_1=1}^{m_1}\sum_{n_2=1}^{m_2} a_{n_1,n_2} \right| \leq K$$

для всех $m_1 \geq 1, m_2 \geq 1$, тогда ряд $\sum_{n_1=1}^{m_1}\sum_{n_2=1}^{m_2} a_{n_1,n_2} b_{n_1,n_2}$ сходится и имеет место оценка

$$\left| \sum_{n_1=1}^{m_1}\sum_{n_2=1}^{m_2} a_{n_1,n_2} b_{n_1,n_2} \right| \ll K \left[\frac{1}{m_1 m_2} \sum_{\nu_1=m_1}^{2m_1}\sum_{\nu_2=m_2}^{2m_2} b_{\nu_1,\nu_2} + \frac{1}{m_1}\sum_{\nu_1=m_1}^{2m_1-1} |b_{\nu_1,m_2}| + \frac{1}{m_2}\sum_{\nu_2=m_2}^{2m_2-1} |b_{m_1,\nu_2}| \right]$$

Лемма3. Пусть $p > 1, r_1, r_2 \geq 0$, $\omega(\delta_1,\delta_2)$ модуль непрерывности $0 < \delta_1 \leq 1$, $0 < \delta_2 \leq 1$ и $\{b_{n_1,n_2}\} \in MRBVS^2, b_{n_1,n_2} \geq 0$ и

$$\sum_{k_1=n_1}^{2n_1}\sum_{k_2=n_2}^{2n_2} b_{k_1,k_2} \ll n_1^{-r_1+1-\delta_1} n_2^{-r_2+1-\delta_2} \omega\left(\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right)$$

Если последовательность $\{\Lambda_{n_1,n_2}\}$ удовлетворяет условию $\Lambda_{2n_1,2n_2} \leq K\Lambda_{n_1,n_2}$ и последовательность

$$\rho_{n_1,n_2} = \rho_{n_1,n_2}(\lambda_1,\lambda_2,p,r_1,r_2,\omega) = \Lambda_{n_1,n_2} n_1^{-pr_1} n_2^{-pr_2} \omega\left(\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right)$$

почти неубывает, тогда функция

$$f(x_1,x_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} b_{n_1,n_2} \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2$$

принадлежит $f \in H(\lambda_1,\lambda_2,p,r_1,r_2,\omega)$.

Для случая функций одной переменной, подобный результат доказан в работе [1].

Список литературы

1. Leindler L. Embedding results pertaining to strong approximation of Fourier series.VI //Analysis Math.,-2008-№34.- C. 39-49.