«Сейфуллин оқулары - 11: Жастар және ғылым» атты Республикалық ғылыми-теориялық конференциясының материалдары = Материалы Республиканской научно-теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения - 11: Молодежь и наука».** – 2015. – **Т.1, ч.3**. – Б. 212-214

ТРИХОМАНЫҢ ӨСУІ»МИКРОБИОЛОГИЯЛЫҚ МОДЕЛЬДІ ЗЕРТТЕУІ

Мазакова Б.М., Жакыпов А.Т.

Бұл жұмыста “Трихоманың өсуі”микробиологиялық үдерістің математикалық моделі болып табылатын оңтайлы басқару есебініңзерттеуі жүргізіледі [1]. Зерттелетін есеп төмендегідей болады:

$$\begin{cases} \dot{x} = a - (a+x)u, \qquad x > 0, \\ x(0) = x_0 > 0, \\ u \in U = [0;1], \\ L = \int\limits_0^T \frac{x}{1+x} u\, dt \longrightarrow \max\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}, \end{cases} \tag{1}$$

есеп трихомалық бактериялар мекені өсуінің математикалық моделі болып табылады. Трихомалық (жіп тәрізді) бактериялар – плазмодесмалармен біріктірілген жасушалар тізбегі – трихомаларды құрайтын таяқша тәрізді грамм теріс бактериялар. Трихомалар сыртынан шырышты қапта болуы мүмкін. Көбі – сырғымалы қозғалатын су организмдері. Трихомалық бактерияларға кейбір хемотрофты бактериялар (Beggiatoa, Thiothrix және басқалары), цианобактериялар қатары, кейбір фототрофты жасыл бактериялар жатады. Трихома үзіктермен көбейеді [2]. Бұл модельде бактериялардың тіршілік әрекетінің үдерісі тек қоректену және өсу режимдерін құрайды деп есептейміз. Қоректену режимінде бактериялар тіршілік әрекетіне қажет нәрлі заттарды қоршаған ортадан қорланады, ал өсуде, керісінше, қорын көбейту үшін жұмсайды, және, олар осы екі режимде де бір уақытта сәйкес қарқындылық үлесте бола алады. Мақсаты бақылау үдерісінің соңына қарай мекеннің одан ары тіршілік етуге жеткілікті көлемде болатын нәрлі заттарды сақтауымен бактериялар санының максимал өсуі болып табылады. Сонымен, x айнымалысы жиналған нәрлі заттар санын білдіреді, $a>0$ — ортадағы нәрлі заттар саны, x_0 — бастапқы қор көлемі, u — мекеннің өсуі үшін қордың жұмсалу қарқындылығы, $1-u$ — ортадан алынатын нәрлі заттарды жинақтау қарқындылығы, $L[u]$ функционалы трихомалар тізбегінің салыстырмалы өсімін анықтайды, T — мекенін бақылау уақытының ұзақтығы [1].

(1) есебін шешу барысында, барлық мүмкін траекториялар мүмкін траекториялар вилкасында жататыны белгіленді [3]:

$$x_-(t) \leqslant x(t) \leqslant x_+(t), \quad \forall t \in [0;T], \tag{2}$$

мұндағы

$$x_-(t) = x_0 e^{-t}, \tag{3}$$
$$x_+(t) = x_0 + at. \tag{4}$$

Сонымен қатар, дифференциалдық теңдеу көмегімен (1) есептен бастапқы функционалдың төмендегі түрі алынды:

$$L[u] = a \int_0^T W(x(t))\,dt - I(x(T)), \tag{5}$$

мұндағы

$$W(x) = \frac{x}{(1+x)(a+x)}, \tag{6}$$
$$I(x(T)) = \int_{x_0}^{x(T)} W(x)\,dx. \tag{7}$$

(5) алмастыру нәтижесінде, біз барынша көбейетін *u*функционалындағы басқарудың анық қатысуынан арылдық және (6)және(7) функциялары үшін экстремумдарды анықтадық. Олар, сәйкес:

$$x_{sng} = \sqrt{a}, \tag{8}$$
$$x(T) = \frac{a}{2\sqrt{a}+1}, \tag{9}$$

ал сәйкес басқарулар төмендегідей:

$$u_{sng} = \frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}, \tag{10}$$
$$u(T) = 1. \tag{11}$$

Қорытындысында, x_0 бастапқы шартқа тәуелді шешім шығарылды.

I. $x_0 = x_{sng}$:

$$x_{op}(t) = \begin{cases} x_{sng}, & 0 \leqslant t \leqslant \theta, \\ x_{sng} e^{\theta - t}, & \theta < t \leqslant T, \end{cases} \qquad u_{op}(t) = \begin{cases} u_{sng}, & 0 \leqslant t \leqslant \theta, \\ 1, & \theta < t \leqslant T. \end{cases} \tag{12}$$

II. $0 < x_0 < x_{sng}$:

$$x_{op}(t) = \begin{cases} x_0 + at, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ x_{sng}, & \tau < t \leqslant T, \\ x_{sng} e^{\theta - t}, & \theta < t \leqslant T, \end{cases} \qquad u_{op}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ u_{sng}, & \tau < t \leqslant T, \\ 1, & \theta < t \leqslant T, \end{cases} \tag{13}$$

$$\tau = \frac{\sqrt{a} - x_0}{a}. \tag{14}$$

III. $x_0 > x_{sng}$:

$$x_{op}(t) = \begin{cases} x_0 e^{-t}, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ x_{sng}, & \tau < t \leqslant T, \\ x_{sng} e^{\theta - t}, & \theta < t \leqslant T, \end{cases} \qquad u_{op}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ u_{sng}, & \tau < t \leqslant T, \\ 1, & \theta < t \leqslant T, \end{cases} \tag{15}$$

$$\tau = \ln\left(\frac{x_0}{\sqrt{a}}\right). \tag{16}$$

$$\theta = T - \ln\left(2 + \frac{1}{\sqrt{a}}\right). \tag{17}$$

Сонымен бірге, Θ уақыт мезеті x_0 -ға қарай инвариантты болады:

Көрсетілгендей, оңтайлы басқару $u_{op}(t)$ бір ($x_0=x_{sng}$)немесе екі ($x_0 \neq x_{sng}$) ауыстыру нүктелері бар үзікті-тұрақты функциядан тұрады, яғни мекен бақылау уақыты аралығында үштен артпайтын режимді ауыстырады. Оңтайлы траектория $x_{op}(t)$ түрі былай түсіндіріледі: алдымен трихомалар мекені айтарлықтай тез арада сингулярлық режимге ұмтылады, мұндағы нәрлі заттар қоры тұрақты деңгейде сақталады, одан кейін осы режимді Θ уақыты мезетіне дейін ұстап тұрып, соңынан толығымен өсу режиміне өтеді [4]. Ескеретініміз, егер$x_0=x_{sng}$,онда мекен Θ мезетіне дейін түспейтіндей сингулярлық режимде болады, кері жағдайда, нәрлі заттар қорының деңгейі x_{sng} тең болғанша, не мекеннің өсуіне кететін қордың жұмсалуы ($x_0>x_{sng}$), не тек олардың жиналуы ($x_0<x_{sng}$) болады. Соңғы, бастапқы шартқа тәуелді емес (Θ;T] уақыт аралығында, мекен тек өсу режимін сақтайды.

Әдебиеттер тізімі

1.H. A. van den Berg, Y. N. Kiselev, S. A. L. M. Kooijman, M. V. Orlov. Optimal allocation between nutrient uptake and growth in a microbial trichome. Берлин: Springer Verlag. Journal of Mathematical Biology, 1997. — № 37. — С. 28 – 48.

2.Фирсов Н. Н. Микробиология: словарь терминов. М.:Дрофа, 2006 — 54 б.

3.Киселев Ю. Н. Оптимальное управление. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988 — 140 б.

4.Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.. Математическая теория оптимальных процессов. — 4-е изд. — М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1983 — 392 б.