С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің 60 жылдығына арналған **«Сейфуллин оқулары– 13: дәстүрлерді сақтай отырып, болашақты құру»** атты Республикалық ғылыми-теориялық конференциясының **материалдары = Материалы** Республиканской научно-теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения – 13: сохраняя традиции, создавая будущее»**, посвященная 60-летию Казахского агротехнического университета имени С.Сейфуллина. **- 2017. - Т.I, Ч.6. -** С.11-15

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ ФРОБЕНИУСА – ЛАТЫШЕВОЙ

Тасмамбетов Ж.Н., *д.ф.-м.наук,*
Тасмамбетова А.Ж. *профессор*
Актюбинский региональный государственный университет им. Жубанова
К г.Актобе.,
АО «КСЖ «Государственная аннуитетная компания», г.Астана

1. **Предварительные сведения.** Исследования по теории гипергеометрических функций двух переменных берет свое начало в\с работы французского математика П. Аппеля, который в 1880 году определил четыре ряда гипергеометрических функций двух переменных $F1 - F4$ [1], каждый из которых аналогичен ряду Гаусса $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. М.П.Гумберт изучал вырожденные гипергеометрические ряды двух переменных. В случае функций двух переменных известны 20 вырожденных гипергеометрических рядов двух переменных: $\Phi_i(\ i = 1,2,3), \Psi_j(j = 1,2), \Xi_j(j = 1,2)$(М. Гумберт), $\Gamma_j(j = 1,2), \mathrm{H}_k\ (k = \overline{1 - 11})$ (Я. Горн и Л. Борнгессер). Все они получены из функций П. Аппеля $F1 - F4$, с помощью предельных переходов. Их полный перечень приведен в [2, стр. 220-221], вместе с 14 полными гипергеометрическими рядами двух переменных, в частности и 4 функциями Аппеля.

Я. Горн изучил их сходимость и установил все 34 системы дифференциальных уравнений в частных производных , которым они удовлетворяют [2, стр. 226-230]. Однако, до сих пор, неизвестны системы, соответствующие функциям Бесселя двух переменных.

Целью данной работы является изучение специальной системы и функции, сводящейся к функции Бесселя, которая является решением данной системы, а так же исследование их отличительных свойств.

Функция, сводящаяся к функции Бесселя, получается с помощью предельного перехода из функции Аппеля $F1$. Здесь мы опираемся на известные данные по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1, стр. 123].

Действительно, осуществляя предельный переход в гипергеометрической функции Гаусса, получаем равенство

$$F\left(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon},\gamma;\varepsilon^2 x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{\varepsilon},\ m)(\frac{1}{\varepsilon},\ m)}{(\gamma,m)(1,m)}\cdot\varepsilon^{2m}\cdot x^m,$$

(1.1)

где использованы обозачения Похгаммера

$(a)_m=a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1),\quad (a)_0=1,\quad (1,m)=m!$

Нетрудно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{\varepsilon},m)\cdot(\frac{1}{\varepsilon},m)\cdot\varepsilon^{2m}=1, \qquad (1.2)$$

поэтому (1.1) принимает вид

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon},\gamma;\varepsilon^2 x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma)_m}\cdot\frac{1}{m!}\cdot x^m,$$

тогда, введя обозначение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon},\gamma;\varepsilon^2 x)=J(\gamma,x),$$

получимсправедливость равенства

$$J(\gamma,x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma)_m}\cdot\frac{1}{m!}\cdot x^m, \qquad (1.3)$$

Функция Бесселя $J_R(x)$ через функцию $J(\gamma,x)$ выражается следующим образом:

$$J_R(x)=\frac{(\frac{x}{2})^k}{\Gamma(k+1)}\cdot J\left(k+1,-\frac{x^2}{2^2}\right). \qquad (1.4)$$

Функция $J(\gamma,x)$ называется функцией, сводящейся к функции Бесселя, и является решением вырожденного гипергеометрического уравнения

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\gamma\cdot\frac{dy}{dx}-y=0. \qquad (1.5)$$

Теперь нас интересует вопрос: Как осуществляется предельный переход в функциях двух переменных?

Определение 1.1 Гипергеометрическая функция $F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y)$ двух переменных x и yопределяется с помощью ряда

$$F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}\cdot(\beta)_m\cdot(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}\cdot m!\cdot n!}\cdot x^m\cdot y^n, \qquad (1.6)$$

где использовано обозначение Похгаммера

$$(a)_k=a(a+1)(a+2)\dots(a-k-1),\quad (a)_0=1.$$

Ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно в области $|x|<1,\ |y|<1.$

Определение 1.2. Функция $F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$x(1-x)\cdot Z_{xx}+y(1-x)\cdot Z_{xy}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\cdot Z_x-\beta\cdot y\cdot Z_y-\alpha\cdot\beta\cdot Z$$

$$y(1-y)\cdot Z_{yy}+x(1-y)\cdot Z_{xy}+[\gamma-(\alpha+\beta'+1)y]\cdot Z_y-\beta'\cdot x\cdot Z_x-\alpha\cdot\beta'\cdot$$

(1.7)

где $\alpha,\beta,\beta',\gamma$ – некоторые постоянные.

Согласно общей теории таких систем [1], если коэффициенты при старших производных Z_{xx}, Z_{xy} и Z_{yy} удовлетворяют условию

$$1-\frac{y(1-x)}{x(1-x)}\cdot\frac{x(1-y)}{y(1-y)}=0 \qquad (1.8)$$

то система (1.2) имеет всего три линейно-независимых частных решений, в частности, одним из частных решений является ряд двух переменных (1.1).

2. Предельный переход в случае функций двух переменных.

В функциях двух переменных при предельном переходе используется равенство вида (1.2):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon},m\right)\cdot\varepsilon^m=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon},n\right)\cdot\varepsilon^n=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon},m+n\right)\cdot\varepsilon^{m+n}=1.$$

(2.1)

В монографии [1, стр.124-125] приводится 23 предельных переходов в функциях $F1-F4$, семь из которых связаны с функцией Аппеля $F1$. Из семи, в данной работе, нас интересует только XIII-ый предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F_1\left(\frac{1}{\varepsilon},\ \frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon};\gamma;\varepsilon^2x,\varepsilon^2y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma)_{m+n}}\cdot\frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^n}{n!},$$

(2.2)

где в параметрах α,β,β' осуществляется предельный переход $\frac{1}{\varepsilon}\to\infty\ (\varepsilon\to 0)$, а так же в независимых переменных ε^2x и ε^2y (при $\varepsilon\to 0$).

Такой же предельный переход осуществляется так же в системе (1.7) и справедлива теорема:

Теорема 2.1. Вырожденная гипергеометрическая система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left.\begin{aligned}x\cdot Z_{xx}+y\cdot Z_{xy}+\gamma\cdot Z_x-Z=0,\\ y\cdot Z_{yy}+x\cdot Z_{xy}+\gamma\cdot Z_y-Z=0,\end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

где $Z=Z(x,y)$– общая неизвестная, имеет решение в виде вырожденного гипергеометрического ряда двух переменных

$$Z(\gamma,x+y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma)_{m+n}}\cdot\frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^n}{n!}, \qquad (2.4)$$

сводящаяся к функциям Бесселя двух переменных.

Установим особые кривые системы, приравнивая нулю коэффициенты при старших производных Z_{xx}, Z_{yy} и Z_{xy}: $x=0,y=0$,то есть конечная особенность системы $(0,0)$, а так же добавляется особенность на бесконечности (∞,∞).

Вблизи особенности $(0,0)$ решение построим методом Фробениуса – Латышевой [3] в виде обобщенного степенного ряда двух переменных

$$Z(x,y)=x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}C_{m,n}\cdot x^m\cdot y^n\ \ (C_{0,0}\neq 0) \qquad (2.5)$$

$(\rho,\sigma,C_{m,n}\ (m,n=0,1,2,\dots)$ – неизвестные постоянные, которые следует определить.

Согласно методу Фробениуса – Латышевой сначала составляется система характеристических функций.

Определение 2.1. Системой характеристических функций системы (2.3) называется система

$$L_1[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}]\equiv x^{\rho}\cdot y^{\sigma-1}\cdot\left\{f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)+f_{10}^{(1)}(\rho,\sigma)\cdot x\right\},$$

$$L_2[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}]\equiv x^{\rho-1}\cdot y^{\sigma}\cdot\left\{f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma)+f_{01}^{(2)}(\rho,\sigma)\cdot y\right\},$$

полученная из (2.3) путем подстановки $Z=x^{\rho}\cdot y^{\sigma}$.

С помощью

$f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)= \rho(\rho-1+\sigma+\gamma),\quad f_{10}^{(1)}(\rho,\sigma)=1,$

$f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma)=\sigma(\sigma-1+\rho+\gamma),\quad f_{01}^{(2)}(\rho,\sigma)=1$

определяются системы определяющих уравнений относительно особенностей

$(0,0)$и

(∞,∞)и неизвестные коэффициенты ряда (2.5)$C_{m,n}(m,n=0,1,2,\dots.)$.

Система определяющих уравнений

$$\left.\begin{aligned}f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma)=\rho(\rho-1+\sigma+\gamma)=0,\\ f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma)=\sigma(\sigma-1+\rho+\gamma)=0\end{aligned}\right\}\qquad(2.6)$$

имеет три пары корней;

I. $(\rho_1=0,\sigma_1)$; II. $(\rho_1=0,\sigma_2=1-\gamma)$; III. $(\rho_2=1-\gamma,\sigma_1=0)$,

позволяющее построить всего три линейноөнезависимых решения системы (2.3).

Неизвестные коэффициенты $C_{m,n}$ $(m,n=0,1,2,\dots.)$ ряда (2.5) определяются из системы рекуррентных уравнений

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}C_{\mu-m,\nu-n}^{(j)}\cdot f_{m,n}^{(j)}(\rho+\mu-m,\sigma+\nu-n)=0\qquad(2.8)$$

$(\mu,\nu=0,1,2,\dots;j=1,2;m,n=0,1,2,\dots)$.

Подставляя найденные значения неизвестных постоянных ρ,σи $C_{\mu,\nu}(\mu,\nu=0,1,2,\dots)$в обобщенный степенной ряд (2.5), последовательно найдем вышеназванные три частных решения.

Первое частное решение, соответствующее показателю $(\rho_1=0,\sigma_1=0)$, имеет вид

$$Z_1(x,y)=1+\frac{x}{\gamma}+\frac{y}{\gamma}+\frac{1}{\gamma(\gamma+1)}\cdot xy+\frac{1}{2\gamma(\gamma+1)}\cdot x^2+\frac{1}{2\gamma(\gamma+1)}\cdot y^2+\dots=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma)_{m+n}}\cdot\frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^n}{n!}.\qquad(2.9)$$

Получен ряд в правой части (2.4). После некоторых преобразований в (2.9), получим

$$Z_1(x,y)=1+\frac{x}{\gamma}+\frac{y}{\gamma}+\frac{1}{\gamma(\gamma+1)}\cdot xy+\frac{1}{2\gamma(\gamma+1)}\cdot x^2+\frac{1}{2\gamma(\gamma+1)}\cdot y^2+\dots=$$

$$= 1 + \frac{x+y}{\gamma} + \frac{x^2+2xy+y^2}{2!\,\gamma(\gamma+1)} + \frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{3!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{x+y}{\gamma} + \frac{(x+y)^2}{2!\,\gamma(\gamma+1)} + \frac{(x+y)^3}{3!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \cdots +$$

$$+ \frac{(x+y)^{m+n}}{(m+n)!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m+n-1)} + \cdots =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m+n-1)} \cdot \frac{(x+y)^{m+n}}{(m+n)!}. \quad (2.10)$$

В теории бесселевых функций известен ряд (1.3), сводящийся к функции Бесселя. По аналогии с (1.3) заключаем, что справедливо равенство

$$Z(\gamma, x+y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m+n-1)} \cdot \frac{(x+y)^{m+n}}{(m+n)!}. \quad (2.11)$$

и на основании равенств рядов в правых частях (2.9) и (2.10), убедимся в справедливости равенства

$$J(\gamma, x+y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma)_{m+n}} \cdot \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^n}{n!}, \quad (2.4)$$

что и требовалось доказать.

3. Основные свойства:

1) Система (2.3) имеет всего три линейно-независимых решений, поскольку коэффициенты при старших производных Z_{xx}, Z_{xy} и Z_{yy} удовлетворяют условию (1.3):

$$1 - \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 0.$$

2) Вблизи особенности $(0,0)$ кроме первого частного решения (2.9)можно построить еще два частных решения, соответствующих показателям

$(\rho_1 = 0, \sigma_2 = 1-\gamma)$:

$$Z_2(x,y) = y^{1-\gamma} \cdot [1 + x + \frac{1}{2-\gamma} \cdot y + \frac{1}{2(2-\gamma)} xy + \frac{1}{2^2} \cdot x^2 + \frac{1}{2(2-\gamma)(3-\gamma)} \cdot y^2 + \cdots]$$

и $(\rho_2 = 1-\gamma, \sigma_1 = 0)$:

$$Z_3(x,y) = x^{1-\gamma} \cdot \left[1 + \frac{1}{2-\gamma} \cdot x + y + \frac{1}{2(2-\gamma)} xy + \frac{1}{2(2-\gamma)(3-\gamma)} \cdot x^2 + \frac{1}{2^2} \cdot y^2 \ldots\right].$$

Согласно общей теории таких систем общее решение системы (2.3) запишется в виде

$$Z = C_1 \cdot Z_1(x,y) + C_2 \cdot Z_2(x,y) + C_3 \cdot Z_3(x,y),$$

где $C_j (j = 1,2,3)$ – произвольные постоянные.

3) Вблизи особенностей на бесконечности не существует решения в виде обобщенного степенного ряда двух переменных по убывающим степеням независимых переменных x и y, поскольку система определяющих уравнений относительно особенности (∞, ∞)не имеет решения.

4) При $\gamma = 1$ в (2.7) вместо трех пар корней получаем трехкратный корень

$(\rho_i = 0, \sigma_i = 0)$ $(i = 1,2,3)$.В этом случае система (2.3) наряду с решением вида (2.4) имеет еще два логарифмических решения.

Построение логарифмических решений требует дополнительного исследования. Общая методика построения таких решений приведена в монографии [4, стр.178].

Таким образом, применение метода Фробениуса-Латышевой позволила нам всесторонне исследовать вырожденную гипергеометрическую систему, полученную путём предельных переходов и установить её всевозможные решения, в частности и решение в виде функции, сводящейся к функциям Бесселя двух переменных. Такие функции и их взаимосвязь с гипергеометрическими функциями двух переменных остаются малоисследованными. Такая методика исследования ранее была использована в работе [4] для установления связей между гипергеометрической функцией Уиттекера и многочленами Лагерра двух переменных.

Список литературы

1. P.Appell and J.F.Kampe de Feriet, Fonctions hypergeometriques et hyper-spheriques: Polynomes d'Hermite, Gauthier-Villars, Paris, 1926, 434 pp.
2. Бейтмен Г. и Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции Ч.I. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, М.: Наука, 1965, 294 с.
3. Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Актобе, 2015, 463 с.
4. Zhaxylyk Tasmambetov. Confluent hypergeometric functions and two variables Laquerre polynomials as a solution of Wilczynski type system// AIP Conference Proceedings 1779, 020137 (2016); doi: 10.1063/1.4959751.