С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің 60 жылдығына арналған **«Сейфуллин оқулары– 13: дәстүрлерді сақтай отырып, болашақты құру»** атты Республикалық ғылыми-теориялық конференциясының **материалдары = Материалы** Республиканской научно-теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения – 13: сохраняя традиции, создавая будущее»**, посвященная 60-летию Казахского агротехнического университета имени С.Сейфуллина. **- 2017. - Т.I, Ч.6. -** С.15-19

РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ФУНКЦИЯХ БЕССЕЛЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Тасмамбетов Ж.Н., *д.ф.-м. наук, профессор*
Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, г. Актобе

1. Введение. Функции Бесселя являются одними из наиболее часто употребляемых высших трансцендентных функций. Они чаще всего встречаются в связи с решением дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных. Такие уравнения возникают в теории потенциала, волнового движения и диффузии в цилиндрических полярных координатах. Различные разделы теории бесселевых функций широко используются при решении задач акустики, радиофизики, гидродинамики, задач атомной и ядерной физики и др.

Функции Бесселя являются решениями дифференциального уравнения Бесселя

$$x^2 \cdot Z_{xx} + x \cdot Z_x + (x^2 - \mu^2) \cdot Z = 0, \tag{1.1}$$

где μ и x могут быть любыми числами, но часто предполагают, что μ не является целым числом.

Уравнение (1.1)имеет регулярную особую точку $x = 0$ и иррегулярную особую точку $x = \infty$. Метод Фробениуса-Латышевой[1]позволяет построить два линейно – независимые частные решения в окрестности регулярной особой точки $[2, \text{с}. 15]$ $x = 0$:

$$\mathrm{J}_\mu(\mathrm{x}) = \left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)^\mu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)^{2m}}{m! \cdot \Gamma(m + \mu + 1)} \tag{1.2}$$

и

$$\mathrm{J}_{-\mu}(\mathrm{x}) = \left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)^{-\mu} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)^{2m}}{m! \cdot \Gamma(m + \mu + 1)}. \tag{1.3}$$

Решение $J_\mu(x)$ называют **функцией Бесселя первого рода**, x – **независимая переменная,** $\boldsymbol{\mu}$ **– порядок функции Бесселя**. Используя свойства степенных рядов одной переменной легко убедиться, что ряд для $x^{-\mu} \cdot J_\mu(x)$ сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области изменения x и μ.

1. Функции Бесселя можно получить различными путями. Для наших дальнейших рассуждений определенный интерес представляет получение путем

предельного перехода [3]. Действительно, если в гипергеометрическом ряде Гаусса осуществить предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma;\ \varepsilon^2 \cdot x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma, m)} \cdot \frac{x^m}{(1, m)}\,, \qquad (1.4)$$

где $(\gamma, m) = \gamma.(\gamma+1)(\gamma+2),,,(\gamma+m-1)$ – символ Похгаммера; (1,m)=m!, то уравнение Гаусса представится [2] в виде

$$x \cdot (1 - \varepsilon^2 x) \cdot \frac{d^2 Z}{dx^2} + \left[\gamma - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \cdot \varepsilon^2 \cdot x\right] \cdot \frac{dZ}{dx} - Z = 0 \qquad (1.5)$$

ипосле предельного переходаполучим вырожденное гипергеометрическое уравнение

$$x \cdot \frac{d^2 Z}{dx^2} + \gamma \cdot \frac{dZ}{dx} - Z = 0 \quad (1.6)$$

с особыми точками $x = 0$ и $x = \infty$ как и уравнение Бесселя.

Из (1.4) легко заметить, что ряд

$$J(\gamma, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma, m)} \cdot \frac{x^m}{(1, m)} \quad (1.7)$$

является решением вырожденного гипергеометрического уравнения (1.6).

$J(\gamma, x)$-называется функцией, сводящейся к функции Бесселя, так как справедливо соотношение Куммера.

$$J_\mu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \cdot J\left(\mu + 1; -\frac{x^2}{2^2}\right), \quad (1.8)$$

где $J_\mu(x)$ – функция Бесселя. Уравнение (1.6) с помощью подстановки

$$Z = x^{-\mu} \cdot J_\mu(x) \quad (1.9)$$

приводится к уравнению Бесселя (1.1).

В настоящее время функции Бесселя одной переменной достаточно хорошо изучены. Установлены их многочисленные приложения. Однако, функции Бесселя двух переменных не получили того развития, как функции Бесселя одной переменной. Хотя основные свойства и некоторые связи этой функции были установлены в работе [4].

Постановка задачи. Изучить возможности построения решений специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\left.\begin{aligned} x^2 p_0 \cdot Z_{xx} + xy \cdot p_1 \cdot Z_{xy} + x p_2 \cdot Z_x + y \cdot p_3 \cdot Z_y + p_4 \cdot Z = 0 \\ y^2 g_0 \cdot Z_{yy} + xy \cdot g_1 \cdot Z_{xy} + x g_2 \cdot Z_x + y \cdot g_3 \cdot Z_y + g_4 \cdot Z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.10)$$

где коэффициенты

$$p_i(x, y) = a_{00}^{(i)} + a_{10}^{(i)} \cdot x, \quad g_i(x, y) = b_{00}^{(i)} + b_{01}^{(i)} \cdot y \quad (1.11)$$

($a_{00}^{(i)}, a_{10}^{(i)}, b_{00}^{(i)}$ и $b_{01}^{(i)}$ $(i = 0,1,2,3,4)$ – некоторые постоянные) многочлены первой степени, в виде функций Бесселя двух переменных

$$J_{\mu,\nu}(x, y) = \left(\frac{x}{2}\right)^\mu \left(\frac{y}{2}\right)^\nu \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \left(\frac{y}{2}\right)^{2n}}{m!\, n!\, \Gamma(\mu + m + 1) \Gamma(\nu + n + 1)}\,. \qquad (1.12)$$

Доказательство устанавливается с помощью предельного перехода. С этой целью введем некоторые понятия из теории систем и гипергеометрических функций двух переменных [3].

2. Предельный переход в гипергеометрических функциях двух переменных.

Система (1.10) - (1.11) отличается тем, что из них при различных значениях коэффициентов $a_{00}^{(i)}, a_{10}^{(i)}, b_{00}^{(i)}$ и $b_{01}^{(i)}(i = 0,1,2,3,4)$можно получить многие системы со списка Горна, в частности системы, решениями которых являются функции Аппеля$F_j(j = 1,2,3,4)$.

Определение 2.1. Гипергеометрическая функция$\mathrm{F}_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y)$двух переменных

хи уопределяется с помощью ряда

$$\mathrm{F}_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\mu+\nu} \cdot (\beta)_\mu \cdot (\beta')_\nu \cdot x^\mu \cdot y^\nu}{(\gamma)_\mu \cdot (\gamma')_\nu \cdot \mu! \cdot \nu!}. \qquad (2.1)$$

Ряд (2.1) сходится абсолютно и равномерно в треугольной области $|x| + |y| \prec 1$.

Определение 2.2. Гипергеометрическая функция двух переменных$\mathrm{F}_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y)$ является частным решением системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left.\begin{aligned} x(1-x)Z_{xx} - xyZ_{xy} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]Z_x - \beta y Z_y - \alpha\beta Z = 0 \\ y(1-y)Z_{yy} - xyZ_{xy} + [\gamma' - (\alpha+\beta'+1)y]Z_y - \beta' x Z_x - \alpha\beta' Z = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

являющаяся частным случаем системы (1.10) с коэффициентами (1.11).

В этом случае справедлив [3] предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \mathrm{F}_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \gamma';\ \varepsilon^2 x, \varepsilon^2 y\right) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma,\mu)\cdot(\gamma',\nu)} \cdot \frac{x^\mu}{(1,\mu)} \cdot \frac{y^\nu}{(1,\nu)} \qquad (2.3)$$

Определение 2.3. Ряд (2.3) является частным решением системы

$$\left.\begin{aligned} x(1-\varepsilon^2 x)Z_{xx} - \varepsilon^2 xyZ_{xy} + \left[\gamma - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} + 1\right)\varepsilon^2 x\right] Z_x - \beta\varepsilon^2 y Z_y - Z = 0 \\ y(1-\varepsilon^2 y)Z_{yy} - \varepsilon^2 xyZ_{xy} + \left[\gamma' - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} + 1\right)\varepsilon^2 y\right] Z_y - \beta'\varepsilon^2 x Z_x - Z = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.4)$$

или системы

$$\left.\begin{aligned} x \cdot Z_{xx} + \gamma \cdot Z_x - Z = 0 \\ y \cdot Z_{yy} + \gamma' \cdot Z_y - Z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

полученной путем предельного перехода из (2.4).

Легко заметить, что двойной ряд в правой части (2.3) является произведением двух гипергеометрических рядов

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma,\mu)\cdot(\gamma',\nu)} \cdot \frac{x^\mu}{(1,\mu)} \cdot \frac{y^\nu}{(1,\nu)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma,\mu)} \cdot \frac{x^\mu}{(1,\mu)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma',\nu)} \cdot \frac{y^\nu}{(1,\nu)} =$$

$$= \mathrm{J}(\gamma, x)\mathrm{J}(\gamma', y). \qquad (2.6)$$

Учитывая разложение (2.6) и соотношение Куммера (1.8), получим произведение

$$J_\mu(x)\cdot J_\nu(y) == \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\cdot J\left(\mu+1;\ -\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\cdot J\left(\nu+1;\ -\frac{y^2}{2}\right)$$

$$= \ = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\left(\frac{y}{2}\right)^\nu\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^{2n}}{m!\,n!\cdot\Gamma(\mu+m+1)\cdot\Gamma(\nu+n+1)}, \qquad (2.7)$$

где $J_\mu(x)$ и $J_\nu(y)$ – функции Бесселя относительно переменных x и y. Если введем обозначение $J_\mu(x)\cdot J_\nu(y) = J_{\mu,\nu}(x,y)$, то получим формулу (1.2), что и требовалась доказать. Ряд$y^{-\nu}\cdot J_\nu(y)$ также как и ряд $x^{-\mu}\cdot J_\mu(x)$ в любой ограниченной области сходится абсолютно и равномерно.

Функцию

$$J(\gamma,\gamma';x,y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma,\mu)\cdot(\gamma',\nu)}\cdot\frac{x^\mu}{(1,\mu)}\cdot\frac{y^\nu}{(1,\nu)} \qquad (2.8)$$

-назовем функцией, сводящейся к функции Бесселя двух переменных (1.12) .

Отметим, что особенности применения метода Фробениуса-Латышевойбыли опубликованы в работе [5] и доложены в различных конференциях, в частности [6]. Простое применение проилюстрируем на конкретном примере.

Пример 2.1.Другой частный случай системы (1.10) – (1.11), решениями которой является функция Бесселя двух переменных (1.2) система вида Гаусса

$$x\cdot(1-\varepsilon^2x)\cdot\frac{d^2Z}{dx^2}+\left[\gamma-\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\cdot\varepsilon^2\cdot x\right]\cdot\frac{dZ}{dx}-Z=0 \qquad (2.9)$$

$$y\cdot(1-\varepsilon^2y)\cdot\frac{d^2Z}{dy^2}+\left[\gamma-\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\cdot\varepsilon^2\cdot y\right]\cdot\frac{dZ}{dy}-Z=0$$

полученная из (1.10) – (1.11) при различных значениях коэффициентов. С помощью предельного перехода как в уравнении (8) получим систему уравнений вида (2.5). Легко заметить приемственность в обоих случаях системы типа Гаусса (2.9) и системы двух переменных (2.4), которые при предельном переходе приводились к виду (2.5). Полученная система имеет регулярную особенность (0,0) и иррегулярную особенность (∞,∞).

Теорема 2.1. Система (2.5), полученная из систем(2.4) и (2.9) с помощью предельного перехода, имеет решение в виде функции Бесселя двух переменных (1.12).Ряд в правой части (1.2) как произведение двух абсолютно и равномерно сходящихся рядов сходится абсолютно и равномерно.

Действительно, подставляя степенной ряд двух переменных

$$Z(x,y) = \sum_{m,n}^{\infty} C_{m,n}\cdot x^m y^n \ (C_{00}\neq 0)$$

в систему (2.5) после определения неизвестных коэффициентов$C_{m,n}(m,n=0,1,2,\dots)$убеждаемся, что решением системы является ряд

$$Z(x,y) = C_{00}\left(1 + \frac{1}{\gamma}x + \frac{1}{\gamma'}y + \frac{1}{\gamma \cdot \gamma'} \cdot xy + \frac{1}{2! \cdot \gamma(\gamma+1)} \cdot x^2 + \frac{1}{2! \cdot \gamma'(\gamma'+1)}y^2 + \cdots\right)$$

$$== C_{00}\left(1 + \frac{1}{\gamma} + \frac{x}{1!} + \frac{1}{\gamma \cdot (\gamma+1)} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$.\left(1 + \frac{1}{\gamma'} \cdot \frac{y}{1!} + \frac{1}{2! \gamma'(\gamma'+1)} \frac{y^2}{2!} + \frac{1}{\gamma'(\gamma'+1(\gamma'+1))} \cdot \frac{y^3}{3} + \cdots\right) = J(\gamma; x) \cdot J(\gamma'; y).$$

На основании (1.8) легко убедиться, что получено произведение двух рядов Бесселя по переменным x и y:

$$J_\mu(x) \cdot J_\nu(y) = \left(\frac{x}{2}\right)^\mu \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m! \cdot \Gamma(\mu+m+1)} \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{2n}}{n! \cdot \Gamma(\nu+n+1)} =\cdot$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^\mu \left(\frac{y}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{2n}}{m!\,n! \cdot \Gamma(\mu+m+1) \cdot \Gamma(\nu+n+1))} \quad (2.10)$$

Правая часть (2.10) в точности совпадает с правой частью (1.12). Поэтому, справедливо соотношение $J_{\mu,\nu}(x,y) = J_\mu(x) \cdot J_\nu(y)$. Отсюда можно вывести различные частные случаи. Например: при $\mu = 0,\ \ \nu = 0$ получим ряд $J_{0,0}(x,y)$,а при $\mu = 1,\ \ \nu = 1$ получим ряд, $J_{1,1}(x,y) = J_1(x) \cdot J_1(y)$. Легко убедиться в абсолютной и равномерной сходимости рядов $J_{0,0}(x,y)$и $J_{1,1}(x,y)$ и из системы (1.10) – (1.11) выводятся также соответствующие системы, которым удовлетворяют эти ряды.

Список литературы

1. Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. ИП Жанадилова С.Т., Актобе, 2015. 463 с.

2. Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: ГИФМЛ «Наука», 1971, 287с.

3.P. Appell, J. Kampe de Feriet. Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polynomes d’Hermite. Paris: Gauthier – Villars, 1926, 434 p.

4. Rabia Aktas, Abdullah Altin, Bayram Cekim. On a two variable analogue of the Bessel functions// Journal of Inequalities and Special Functions. Volume 3 Issue 4(2012), Pages 13-23.

5.Тасмамбетов Ж.Н. Об одной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка//Укр.мат.журнал, 1992, Т.44, №3, с.427-430.

6. Zhaxylyk Tasmambetov. Confluent hypergeometric functions and two variables Laguerre polynomials as a solutions of Wilczynski type system//AIP Conference Proceedings 1759, 020137 (2016); doi:10.1063/1,4959751.