С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің 60 жылдығына арналған **«Сейфуллин оқулары– 13: дәстүрлерді сақтай отырып, болашақты құру»** атты Республикалық ғылыми-теориялық конференциясының **материалдары = Материалы** Республиканской научно-теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения – 13: сохраняя традиции, создавая будущее»**, посвященная 60-летию Казахского агротехнического университета имени С.Сейфуллина. **- 2017. - Т.I, Ч.6. -** С.49-51

РЯД ФУРЬЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

А. Ж. Аскарова, К.К. Такабаев,
Е.А. Грип., Г.Р. Елеусизова

Математика одна из немногих наук, которая широко используется на практике. Любой производственно-технологический процесс не обходится без фундаментальных математических законов. Эффективное применение различных приемов математического инструмента позволяет конструировать и создавать различные конструкции, которые могут быть выполнены с помощью сложных расчетов [1, 2].

Тесная связь математики и производства приводит к взаимному обогащению, как самой математики, так и прикладной отрасли науки.

Инженерная практика в значительной мере способствует и стимулирует развитие аппарата математики именно из-за того, что математические методы очень часто встречаются на производстве. Специалистам очень важно знать и хорошо ориентироваться в области применения тех или иных методов расчета. Так, например, энергетику для расчета периодических несинусоидальных процессов следует иметь четкое представление о таком важном понятии, как ряд Фурье.

Ряд Фурье в комплексной форме широко применяется в энергетике и радиотехнике. На первый взгляд представление функции $f(x)$ в комплексной форме очень простое [3, 4].

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{inx}$$

Однако для получения этой формулы следует уметь представить функцию с помощью формулы Маклорена [4]

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+f''(0)\cdot\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\cdot\frac{x^3}{3!}+\ldots f^{(n)}(0)\cdot\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

в виде степенного ряда.

Некоторые функции, такие как e^x, $\cos x$, $\sin x$ при разложении в степенной ряд имеют вид [4].

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots.+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots..+(-1)^{n-1}\,\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots..+(-1)^{n-1}\,\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Эти формулы дают возможность получить формулу Эйлера, которая позволяет представить показательную функцию через тригонометрические функции $\cos x$ и $\sin x$.

Разложим в степенной ряд функцию вида $f(x)=e^{ix}$ (i– мнимая единица, $i^2=-1$)

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+.......$$

или

$$e^{ix}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\right).$$

Зная о разложении $\cos x$ и $\sin x$ в степенной ряд, получим

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

Это и есть формула Эйлера.

Имея в виду, что $\sin(-x)=-\sin x$, получим

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$$

Пусть имеем ряд Фурье для периодической функции $f(x)$ с периодом 2π

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

Выразим $\cos x$ и $\sin x$ через показательные функции. Для этого воспользуемся формулами Эйлера

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=-i\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}.$$

Точно также

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},\quad \sin nx=-i\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}.$$

Поставляя эти значения в ряд Фурье, получим

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}-ib_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right)$$

или

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right).$$

Обозначая

$$C_0=\frac{a_0}{2},\quad C_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\quad C_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$$

получим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{inx}.$$

Это и есть комплексная форма ряда Фурье [3,4].

Выразим коэффициенты C_n через интегралы. Для этого умножим функцию $f(x)$ на e^{inx} и проинтегрируем:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\,, C_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx\,.$$

Если функция $f(x)$ с периодом $2l$, то ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

В этом случае ряд Фурье в комплексной форме примет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}\,,$$

где коэффициенты этого ряда определяются формулами

$$C_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{l}x}dx\,, n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$$

Комплексная форма рядов Фурье широко применяется в электротехнике, радиотехнике и других отраслях науки и техники [4]. Разложение функции в ряд Фурье приводит к аналитическому представлению функции, которое очень удобно для вычислительных целей.

Небольшое изложение из теории рядов Фурье показывает, какой нужен большой математический аппарат для этого. В целом математика призвана обнаружить логические связи, сформулировать алгоритм, произвести расчеты и найти кратчайший путь решения поставленной задачи.

Список литературы

1. Pasqual, A.M.A patch near-field acoustical holography procedure based on a generalized discrete Fourier series. Mechanical Systems and Signal Processing, 90, 2017, pp. 285-297.
2. Bloemker D.,Wacker P., Wanner N. Probabilistic estimates of the maximum norm of random Neuman Fourier series. Communikations in nonlinear science and numerical simulation. Volume 47, JUN 2017, Pages 348–369.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т.3. М.: Наука, 1970,- 655с.
4. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления.т.2:Учебное пособие для втузов. М.: Наука, 1985,-560с.