С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетінің 60 жылдығына арналған **«Сейфуллин оқулары– 13: дәстүрлерді сақтай отырып, болашақты құру»** атты Республикалық ғылыми-теориялық конференциясының **материалдары = Материалы** Республиканской научно-теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения – 13: сохраняя традиции, создавая будущее»**, посвященная 60-летию Казахского агротехнического университета имени С.Сейфуллина. **- 2017. - Т.I, Ч.6. -** С.52-54

# ГРАФТА ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЬ ОПЕРАТОРЫ ҮШІН ҮЛГІЛІК КЕРІ СПЕКТРАЛЬДІ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУ

***Мырзабекова Г.Е., Тәжібай Л.К.***

Берілген жұмыста геометриялық графта Штурм-Лиувилль операторы үшін үлгілік кері спектральді есебі зерттеледі. Берілген есептің мақсаты N жеке мәндері бойынша шекаралық шарттардың N параметрлерін қалыпқа келтіру болады. Бұл есеп жеке мәндердің шекаралық шарттар параметрлерінен монотонды тәуелділік қасиетіне ие болатындығы орнатылған. Қойылған есеп ақырғы өлшемді кеңістіктегі оператор үшін көп параметрлі кері спектральді есепке келтірілген. Қарастырылатын есептің сандық шешімінің жаңа алгоритмі сипатталады.

Есептің қойылымы келесідей болады. Әрбір қабырғасында нөлдік емес потенциалымен Штурм-Лиувилль операторы берілген, геометриялық үш сәулелік графты қарастырайық.

$$(a_k(x_k)y_k'(x_k))' + \lambda b_k(x_k)y_k(x_k),\ x_k \in (0;l_k),\ k = \overline{1,3}, \tag{1}$$

$a_k(x_k), a_k'(x_k), b(x_k)$ функциялары $(0;l_k)$–да үздіксіз ретінде болжанады; оның үстіне, $a_k(x_k), b(x_k)$ функциялары сәйкес $k = \overline{1,3}$-те $(0;l_k)$–да оң.

Қарастырылатын Штурм-Лиувилль операторы үшін графтың әрбір шекаралық төбесінде төмендегі шарт

$$y'_k(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2})y_k(l_k) = 0, \quad k = \overline{1,3} \tag{2}$$

және жалпы түйінде келесі шерт беріледі

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0),\ \sum_{i=1}^{3} y'_i(0) = 0. \tag{3}$$

Шекаралық (2) шарттарының коэффициенттері нақты болуы қажет: $p_{k1} > 0,\ p_{k2} < 0,\ k = \overline{1,3}$.

Қойылған шеттік есептер (1)-(3) үшін кері спектральді есебі р = ($p_{11}$ , $p_{21}$, $p_{31}$, $p_{12}$, $p_{22}$, $p_{32}$) шекаралық шартының коэффициенттерін қалыпқа келтіруден тұрады, бұл ретте алдын-ала берілген $\lambda_1$, $\lambda_2$ , . . . , $\lambda_6$ сандары Штурм-Лиувилль операторы болып табылады.

Ұқсас есептердің көптеген қосымшалары бар, көп жағдайда жеке тербелістердің жиілігі бойынша техникалық жүйелерді диагностикалау мен сәйкестендіру есептерінде кездеседі.

Оператор үшін көп параметрлік кері спектральді есептердің сандық шешімі. Ақырғы өлшемді $E^6$ евклидті кеңістігіндегі $B(\lambda, p)$ операторы үшін көппараметрлік кері спектральді есебі шешімінің сандық қойылымының әдісін қарастырамыз. Бұл әдіс шекаралық шарттардың параметрлерінен жеке мәндерінің монотонды тәуелділігіне негізделген және кесіндіні қақ бөлу әдісінің аналогы болып табылады.

$K = \{x \in R^6 : x_k \geq 0 \,\text{или}\, x_k \leq 0\}$ векторлар конусын және

$[a,b]_K = \{x \in R^6 : a_k \leq x_k \leq b_k\}$ конустық кесіндіні қарастыруға енгіземіз.

$p \in [a,b]_K$ векторның қандай-да бір мәнінде B(λ, p) операторының жеке мәндерін $\mu_1(p), \mu_2(p), ..., \mu_6(p)$ арқылы белгілейміз.

$\mu(p) = (\mu_1(p), \mu_2(p), ..., \mu_6(p)) : K \to K$ функциясы $\mu(p) \in C^1(K)$ үздіксіз дифференциалданатын және «монотондық» қасиетіне ие:

$$\frac{\partial \mu_j(p)}{\partial p_{k1}} \neq 0,\ \frac{\partial \mu_j(p)}{\partial p_{k2}} \neq 0,\ k = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,6}.$$

Берілген спектральді мәліметтер $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6) \in R^6$ үшін көппараметрлік кері спектральді есептің шешімі болмайтын облысы ретінде $p \in R^6$ векторы жоқ облысты атаймыз, мұндағы $\mu(p) = \lambda$.

Егер $\lambda \notin [\mu(a), \mu(b)]_K$ болса, $\mu(p)$ функциясының монотондығы арқасында, $[a,b]_K$ конустық кесіндісі, берілген спектральді мәліметтер үшін көппараметрлік кері спектральді есептің шешімі жоқ облысы болып табылады.

Қандай-да бір $\lambda$ спектральді мәліметінде көппараметрлік кері спектральді есептің шешімін іздейтін $[a,b]_K$ конустық кесіндісін анықтайық.

Конустық кесіндінің центрі болып табылатын $c \in [a,b]_K$ нүктесін алайық. Үш нүкте $[a,b]_K$ конустық кесіндісінің облыс асты болып табылатын $[a,c]_K$ және $[c,b]_K$ екі конустық кесіндіні құрайды. 6-өлшемді конустық кесіндіде $2^6$=64 төбелері болады, онда $\bigcap_{i=1}^{64} [a,b]_K^{(i)} = c,\ \bigcap_{i=1}^{64} [a,b]_K^{(i)} = [a,b]_K$ болатындай, $i = \overline{1,64}$, $[a,b]_K^{(i)}$ -дің 64 облыс астын құрауға болады.

Әрі қарай, $[a,b]_K^{(i)}$, $i = \overline{1,64}$ әрбір конустық кесіндіде $\lambda \in [\mu(a), \mu(b)]_K^{(i)}$ шартының орындалуын тексереміз. Егер шарт орындалса, онда қарастырылатын конустық кесіндінің шешімі болмайды; егер де шарт орындалмаса, онда оны бөлуді орындап, келесі конустық кесіндіге көшеміз.

Берілген процелураны ақырғы сан рет жалғастыра отырып, кез-келген қажетті дәлдікпен шешімнің болуы облысының оқшаулануын аламыз.

Берілген сандық әдіс MATLAB пакетінде жүзеге асырылған және қанағаттанарлық нәтижелер берді. Берілген әдіс кері спектральді есеп параметрлерінің көп санына масштабталған. Тестілік мысал келтірейік. Мысалға,

$a_1 = 1,\quad a_2 = 1,\quad a_3 = 1,\quad l_1 = 3,\quad l_2 = 2,\quad l_3 = 1,$

$p_{11} = 1,\ p_{12} = -2,\ p_{21} = 3,\ p_{22} = -4,\ p_{31} = 5,\ p_{32} = -6.$

Онда тікелей спектральді есептің шешімі $\det(B(\lambda, p)) = 0$ теңдеуін шешумен эквивалентті және келесі түрде болады

$\lambda_1$ = 0.5572, $\lambda_2$ = 0.9367, $\lambda_3$ = 0.9888, $\lambda_4$ = 5.4950, $\lambda_5$ = 20.1710, $\lambda_6$ = 40.2343.

Нәтижесінде берілген сандық әдістің жүзеге асырылуы барысында берілген λ мәндерінде кері спектральді есептің шешімдері алынды:

$p_1$=0.9202806, $p_2$=−1.6117790, $p_3$=5.8754782, $p_4$=−6.3753988, $p_5$=3.4632650, $p_6$=−5.7611388,

$p_1$=1.0000000, $p_2$=−2.0000000, $p_3$=3.0000000, $p_4$=−4.0000000, $p_5$=5.0000000,$p_6$=−6.0000000,

$p_1$=3.5341756,$p_2$=−3.3950979, $p_3$=0.7016622,$p_4$=−2.185355,$p_5$=116.525585, $p_6$=−140.3812874,

$p_1$= 3.5360769, $p_2$=−3.394415, $p_3$=0.700559, $p_4$=−2.1840583, $p_5$=136.31944, $p_6$=−164.29042,

$p_1$= 4.5108011, $p_2$=−4.9345428, $p_3$=0.7509959, $p_4$=−2.0055176, $p_5$=5.108197, $p_6$=−6.27980,

$p_1$= 8.2942454, $p_2$=−11.9247083, $p_3$= 0.5891226, $p_4$=−1.6078367, $p_5$=6.15919, $p_6$=−5.903503,

$p_1$= 33.1058461, $p_2$=−29.3652399, $p_3$=1.0722497, $p_4$=−1.6223425, $p_5$=2.27057, $p_6$=−5.80197.

Оның біреуі берілген шекаралық шарттар параметрімен сәйкес келеді.

**Әдебиеттер тізімі**

1. Yang Chuan-Fu. Inverse nodal problems for the Sturm-Liouville operator with a constant delay. /JOURNALOF DIFFERENTIAL EQUATIONS. Том: 257.Шығарылым: 4. Беттер.: 1288-1306. Жарияланды: AUG, 2014 (*Impact Factor ISI Web of Science: 1.821*).

2. Yurko V. A. Inverse problem for Sturm-Liouville operators on hedgehog-type graphs. / MATHEMATICAL NOTES. Том:89. Шығарылым:3-4. Беттер.:438-449.Жарияланды: APR, 2011 (*Impact Factor ISI Web of Science: 0.425*).