«Сейфуллин оқулары-14: Жастар, ғылым, инновациялар: цифрландыру – жаңа даму кезеңі» атты Республикалық ғылыми-теориялық = **Материалы** Республиканской научно-теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения-14: Молодежь, наука, инновации: цифровизация – новый этап развития». - 2018. - Т.1,Ч.4. -** Б.162-165

ПАРАМЕТРЛІК ӘДІСПЕН КЕЙБІР ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛУІ

Е.Ә. Ақжігітов, М.Ш.Тілепие, П.Б. Бейсебай, А.Б.Аруова

Қарастырылып отырған мақалада $[0,T]$ аралығында жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(t)x(\theta_{i-1}) + f(t), \quad x \in R^n,$$

(1)

шартын қанағаттандыратын сызықты екі нүктелі шеттік есепті қарастырамыз:

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n.$$

(2)

Мұнда $A_j(t),\ j = 0,...,m+1$ - $(n \times n)$ - өлшемді матрица және $f(x,t)$ $[0,T]$-да үзіліссіз n өлшемді вектор-функция, $0=\theta_0<\theta_1<...<\theta_{m-1}<\theta_m<\theta_{m+1}=T$, нормасы $\|x\| = \max_{i=1,n}|x_i|$, $\|A(t)\| = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)|$.

Жүктелген дифференциалдық теңдеулер және осы теңдеулер үшін шеттік есептер көптеген жұмыстарда қарастырылған. Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер механика, биология және химия үдерістерінің математикалық сүлбесін жасағанда пайда болады. Мысалы: бөлшек тасымалының үдерісінің модельдеуі, агроэкожүйені тиімді басқару, ұзақ мерзімді болжам жасау, топырақ ылғалының деңгейін реттеу т.б.

Жүктелген теңдеулер теориясының дамуына В.М. Абдуллаев пен К.Р. Айда-заденің [1] жұмыстарында бастапқы және көпнүктелі шарттармен берілген жай жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешудің сандық әдісі ұсынылады. Д.С. Джумабаев [2] еңбегінде жай дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есепті шешудің және зерттеудің параметрлік әдісін ұсынды. Бұл әдіс берілген есептің шешілу шарттарын және оның шешімін табудың алгоритмін тұрғызуға мүмкіндік берді. Э.А. Бакированың [3] жұмысында осы әдіс арқылы әртүрлі интервал қадамымен (1), (2) есептің шешімін табу алгоритмі ұсынылады. Е.А. Ақжігітов пен Ж.М. Қадырбаеваның [4], [5] еңбектерінде жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін қойылған шеттік есепті параметрлеу әдісі бойынша интервалды бірқалыпты емес бөліктеу арқылы зерттеп, іргелі матрицаның көмегімен есептің бірмәнді шешілуінің қажетті және жеткілікті шарты алынған.

Мақаланың негізгі мақсаты (1), (2) есептің әртүрлі бөлу қадамдарында бірмәнді шешілуінің қажетті және жеткілікті шартын табу.

$C([0,T],R^n)$ арқылы нормасы $\|x\|_0 = \max_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$ болатын, $x:[0,T]\to R^n$ үзіліссіз функциялар кеңістігін белгілейміз.

Анықтама 1. (1) жүктелген дифференциалдық теңдеуді және (2) шеттік шартты қанағаттандыратын $x^*(t)\in C([0,T],R^n)$ функциясын (1), (2) есептің шешімі дейміз.

Қарастырылып отырған жұмыста (1), (2) есеп параметрлеу әдісімен зерттеледі. $\|A_0(t)\|\le\alpha_0(t)$ болсын, мұнда $\alpha_0(t)$ функциясы $[0,T]$ де үзіліссіз. $a>0$ санын аламыз және k_{i-1} арқылы мына теңсіздік $\int_{\theta_{i-1,k_{i-1}-1}}^{\theta_i}\alpha_0(\tau)d\tau\le a$ орын алатындай $[\theta_{i-1},\theta_i)$ аралығын бөліктеу санын белгілейміз.

Келесі белгілеулерді енгізейік:

$p_0=0,\ p_{l+1}=\sum_{s=0}^{l}k_s,\ l=\overline{0,m}$ және $[0,T)=\bigcup_{r=1}^{p_{m+1}}[t_{r-1},t_r)$ бөліктеуін жүргіземіз, мұндағы $t_0=\theta_0=0,\ t_1=\theta_{0,1},\ t_2=\theta_{0,2},\ \ldots,\ t_{p_1}=\theta_1,\ t_{p_1+1}=\theta_{1,1},\ldots,t_{p_2}=\theta_2,\ldots,t_{p_{m+1}}=T.$

$C\left([0,T],t_r,R^{np_{m+1}}\right)$ арқылы нормасы $\|x[\cdot]\|_1=\max_{r=\overline{1,p_{m+1}}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|x_r(t)\|$ болатын $x[t]=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_{p_{m+1}}(t))$ функциялар жүйесінің кеңістігін белгілейміз, мұндағы $x_r:[t_{r-1},t_r)\to R$ үзіліссіз және барлық $r=\overline{1,p_{m+1}}$, үшін, шекті солжақты шектері бар $\lim_{t\to t_r-0}x_r(t)$. $[t_{r-1},t_r)$ - r-ші интервалында $x(t)$ сығылуын $x_r(t)$ деп белгілейміз, яғни, барлық $r=\overline{1,p_{m+1}}$ үшін $x_r(t)=x(t)$.

$\lambda_r = x_r(t_{r-1}), \quad r=\overline{1,p_{m+1}}$ параметрлерін енгізейік және $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r, \quad r=\overline{1,p_{m+1}}$ алмастыруын жасаймыз. Сонда параметрлік шеттік есепті аламыз:

$$\frac{du_r}{dt} = A_0(t)[u_r(t)+\lambda_r] + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(t)\lambda_{p_{i-1}+1} + f(t), \;\; t\in[t_{r-1},t_r), \tag{3}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \;\; r=\overline{1,p_{m+1}} \tag{4}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_{p_{m+1}} + C\lim_{t\to T-0} u_{p_{m+1}}(t) = d, \;\; \lambda_s + \lim_{t\to t_s-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \;\; s=\overline{1,p_{m+1}-1}. \tag{5}$$

(1), (2) және (3)–(5) есептері эквивалентті. Егерде $(\lambda, u[t])$-функциясы (3)-(5) есептің шешімі болса, мұндағы $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{p_{m+1}})$, $u[t] = (u_1(t),u_2(t),\ldots,u_{p_{m+1}}(t))$, онда $x(t)=\lambda_r + u_r(t)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$, $x(T) = \lambda_{p_{m+1}} + \lim_{t\to T-0} u_{p_{m+1}}(t)$ қатынасымен анықталатын $x(t)$ функциясы (1), (2) есептің шешімі болады. Керісінше, егер $\tilde{x}(t)$- (1), (2) есептің шешімі болса, онда $(\tilde{\lambda},\tilde{u}[t])$ мұндағы $\tilde{\lambda} = (\tilde{x}(0),\tilde{x}(t_1),\ldots,\tilde{x}(t_{p_{m+1}-1}))$, $\tilde{u}[t] = (\tilde{x}(t)-\tilde{x}(0),\tilde{x}(t)-\tilde{x}(t_1),\ldots,\tilde{x}(t)-\tilde{x}(t_{p_{m+1}-1}))$ (3)–(5) есептің шешімі болады.

$\lambda\in R^{np_{m+1}}$ параметрінің бекітілген мәндерінде функциялар жүйесі және $u[t]$ функциясы жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі болатын (3), (4) есептен анықталады. (3), (4) есеп интегралдық теңдеулер жүйесіне эквивалентті:

$$u_r(t) = X(t)\int_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)A_0(\tau)\lambda_r\,d\tau + X(t)\int_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\sum_{i=1}^{m+1}A_i(\tau)\lambda_{p_{i-1}+1}\,d\tau + X(t)\int_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau, \;\; t\in[t_{r-1},t_r), \;\; r=\overline{1,p_{m+1}}, \tag{6}$$

(6)- шешіп, біз $\lambda\in R^{np_{m+1}}$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$, және $f(t)$ байланысты $u(t)$ функциясын табамыз да, оны (4) және (5) теңдеулерге қойып, белгісіз коэффициенттер табу үшін теңдеулер жүйесін аламыз:

$$B\lambda_1 + C\lambda_{p_{m+1}} + CX(T)\int_{t_{p_{m+1}-1}}^{T} X^{-1}(\tau)A_0(\tau)\lambda_{p_{m+1}}\,d\tau + CX(T)\int_{t_{p_{m+1}-1}}^{T} X^{-1}(\tau)\sum_{i=1}^{m+1}A_i(\tau)\lambda_{p_{i-1}+1}\,d\tau + CX(T)\int_{t_{p_{m+1}-1}}^{T} X^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau = d,$$

$$\lambda_s + X(t_s)\int_{t_{s-1}}^{t_s} X^{-1}(\tau)A_0(\tau)\lambda_1 d\tau + X(t_s)\int_{t_{s-1}}^{t_s} X^{-1}(\tau)\sum_{i=1}^{m+1} A_i(\tau)\lambda_{p_{i-1}+1} d\tau + X(t_s)\int_{t_{s-1}}^{t_s} X^{-1}(\tau) f(\tau)d\tau = \lambda_{s+1}, \quad s=\overline{1,p_{m+1}-1}.$$

Бұл теңдеулер жүйесін векторларды ескере отырып, мына түрде жазамыз:

$$Q\lambda = -F,$$

мұндағы

$$Q=\begin{pmatrix} B+CX(T)\int_{t_{p_{m+1}-1}}^{T} X^{-1}(\tau)A_1(\tau)d\tau & 0 & \ldots & CX(T)\int_{t_{p_{m+1}-1}}^{T} X^{-1}(\tau)A_2(\tau)d\tau & \ldots & C+CX(T)\int_{t_{p_{m+1}-1}}^{T} X^{-1}(\tau)A_0(\tau)d\tau \\ I+X(t_1)\int_{t_0}^{t_1} X^{-1}(\tau)A_0(\tau)d\tau + X(t_1)\int_{t_0}^{t_1} X^{-1}(\tau)A_1(\tau)d\tau & -I & \ldots & X(t_1)\int_{t_0}^{t_1} X^{-1}(\tau)A_2(\tau)d\tau & \ldots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \ldots & \ldots & \cdots\cdots & \ldots & \cdots\cdots \\ X(t_{p_{m+1}-1})\int_{t_{p_{m+1}-2}}^{t_{p_{m+1}-1}} X^{-1}(\tau)A_1(\tau)d\tau & 0 & \ldots & (t_{p_{m+1}-1})\int_{t_{p_{m+1}-2}}^{t_{p_{m+1}-1}} X^{-1}(\tau)A_2(\tau)d\tau & \ldots & -I \end{pmatrix}$$

$$Q: R^{np_{m+1}} \to R^{np_{m+1}}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_{p_{m+1}} \end{pmatrix} \in R^{np_{m+1}}, \quad F = \begin{pmatrix} X(T)\int_{t_{p_{m+1}-1}}^{T} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau - d \\ X(t_1)\int_{t_0}^{t_1} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X(t_{p_{m+1}-1})\int_{t_{p_{m+1}-2}}^{t_{p_{m+1}-1}} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \end{pmatrix} \in R^{np_{m+1}}.$$

Анықтама 2. Егер есептің кез келген $(f(t),d)$ үшін бірғана шешімі бар болса, онда (1), (2) есебі бірмәнді шешіледі.

Теорема 1. Егерде Qкері матрица болса, сонда тек сонда ғана (1), (2) есеп бірмәнді шешіледі.

Жалпы жағдайда, егерде А матрицасы айнымалы коэффициенттерден тұрса, онда іргелі матрицаны табу қиын болады. Біpақта, сандық әдісті пайдаланып, жуық шамамен іргелі матрицаны табуға болады. Іргелі матрицаны табу үшін Рунге-Кутта әдісі қолданылады.

Әдебиеттер тізімі

1. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 2004. - Т. 44, № 9. - С. 1585-1595.

2. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1989. - Т. 29, № 1. - С. 50-66.

3. Бакирова Э.А. О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер.физ.-матем. - 2005. -№ 1. - С. 95-102.

4. Акжигитов Е.А., Кадирбаева Ж.М. О разрешимости периодической краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения второго порядка // Труды международной научной конференции. «Дифференциальные уравнения и математическая физика», г. Алматы, стр.37-39. 2014г

5. Акжигитов Е.А., Кадирбаева Ж.М. О разрешимости двухточечный краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Приволжский научный журнал апрель 2014. г. Ижевск. №4(32), Стр.5-9