С.Сейфуллиннің 125 жылдығына арналған **«Сейфуллин оқулары – 15: Жастар, ғылым, технологиялар: жаңа идеялар мен перспективалар»** атты халықаралық ғылыми-теориялық конференциясының материалдары = Материалы Международной научно-теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения – 15: Молодежь, наука, технологии – новые идеи и перспективы»**, приуроченной к 125-летию С.Сейфуллина. - 2019. - Т.II, Ч 1 - Б.133-136

САНДЫҚ ҚАТАРДЫҢ ЖИНАҚТАЛМАУЫНЫҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ ТУРАЛЫ

Ғабиденов Ш.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \tag{1}$$

қатары үшін

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \rho_n = \infty \tag{2}$$

орындалатындай $\rho_n \to 0$ болатындай кемімелі $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі табылады. Осы орайда келесі тұжырым белгілі:

Теорема Әрбір $n \in \mathrm{N}$ саны үшін $a_n \geq 0$ және $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ болсын. Онда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,,\ S_n \to +\infty (n \to +\infty) \tag{3}$$

болатын дербес қосындылар тізбегі үшін

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} = \infty \tag{4}$$

болады да, ал кез келген $\delta > 0$ үшін

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\delta}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n S_n^{\delta}} < \infty\,. \tag{5}$$

Біз қарастыратын мәселе – қандай жинақталмайтын сандық қатарлар үшін белгілі теоремада $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\delta}}$ орнына $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n (\ln S_n)^{\beta}}$ қатарын қарастыруға болады? Дәлірек айтқанда, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сандық қатары төмендегі шарттарды қанағаттандыруы үшін a_n жалпы мүшесінің ретін анықтау керек:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty;$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сандық қатарының дербес қосындылар тізбегі $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, яғни

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

үшін

$$S_n \to +\infty (n \to +\infty)$$

және

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} = +\infty$$

3. Әрбір $\beta > 1$ нақты саны үшін

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n (\ln S_n)^{\beta}} < \infty \tag{6}$$

Алдымен, кейбір дербес жағдайлар қарастырылып, алдын ала алынған $\sum_{n=1}^{\infty} n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ сандық қатарлары үшін

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\delta}} < \infty$$

және

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n (\ln S_n)^{\beta}} < \infty$$

қатынастары бірге орындалатыны дәлелденіп көрсетілген. Осы қатарлар арқылы келесі қорытындыға келеміз:

Сандық қатардың a_n жалпы мүшесі $n \to \infty$ ұмтылғанда $a_n \to +\infty$ неғұрлым тез ұмтылатын болса, онда белгілі теоремада $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\delta}}$ сандық қатарының орнына

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n (\ln S_n)^{\beta}} \tag{7}$$

сандық қатарын алуға болады.

Теорема (Раабе белгісі). Оң мүшелі $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сандық қатары берілсін. Егер Раабе тізбегі деп аталатын $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ $(n = 1,2,...)$ тізбегі үшін:

а) Қайсыбір *m* номері мен *τ>1* оң саны үшін *n≥m* болған сайын $R_n \geq \tau$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақталады;

б) Қайсыбір *m* номері үшін *n≥m* болған сайын $R_n \geq 1$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақталмайды.

Дәлелдеуі. Әуелі а)-ны дәлелдейік. δ саны τ мен 1 сандарының қақ ортасы болсын, яғни

$1 < \delta = \frac{1+\tau}{2} < \tau$. Ал $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\delta} - 1}{\frac{1}{n}} = \delta$ болғандықтан, $\varepsilon = \tau - \delta > 0$ үшін $n \geq N \geq m$ болған сайын

$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\delta} - 1}{\frac{1}{n}} < \delta + \varepsilon = \tau$, яғни $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\delta} < 1 + \frac{\tau}{n}$ болатындай N номері табылады. Ал $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \tau$ мен $1 + \frac{\tau}{n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}$ пара-пар екенін ескере отырып,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\delta} = \frac{\frac{1}{n^{\delta}}}{\frac{1}{(n+1)^{\delta}}}$$

теңсіздігіне келеміз. $b_n = \frac{1}{n^{\delta}}$ үшін соңғы теңсіздік былай көшіріледі: $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Бұдан

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \ldots \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} a_1 \leq a_1 \frac{b_2}{b_1} \ldots \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{a_1}{b_1} b_n = a_1 \frac{1}{n^{\delta}},$$

демек, салыстыру теоремасы бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақталады, өйткені δ>1.

в) жағдайында $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, яғни $b_n = \frac{1}{n}$ үшін $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Осының алдындағыдай,

$$\frac{1}{n}=b_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdots\frac{b_3}{b_2}\cdot\frac{b_2}{b_1}b_1\leq\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}b_1=a_n\frac{b_1}{a_1}=\frac{1}{a_1}a_n\,,$$

демек, тағы да салыстыру теоремасы бойынша $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатары жинақталмайды, өйткені $\sum\frac{1}{n}$ қатары жинақсыз. Теорема дәлелденді.

Ескерту. Әдетте Раабе белгісін келесі жағдайда қолданады. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\tau$ шегі бар болсын. Егер $\tau>1$ болса, онда қатар жинақталады, ал $\tau<1$ болса – жинақталмайды.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ қатары үшін $R_n=n\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right]$ болады. Тейлор формуласы

бойынша $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1+\varepsilon_n}{2n^2}$ $(\varepsilon_n\to 0)$, демек,

$\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=e^{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{\frac{1+\varepsilon_n}{2n}}$, сол

себептен $R_n=n\left[e^{\frac{1+\varepsilon_n}{2n}}-1\right]=\frac{e^{\frac{1+\varepsilon_n}{2n}}}{\frac{1+\varepsilon_n}{2n}}\times\frac{1+\varepsilon_n}{2}\to\frac{1}{2}=\tau<1$, өйткені $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Сөйтіп, $\tau<1$, сондықтан Раабе белгісі бойынша қатар жинақталмайды.

Әдебиеттер тізімі

1 Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т.1, Алматы: “Мектеп”, 2015.

2 Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т.2, Алматы: «Ана тілі», 2011.

3 Саханов.Н., Жаңбырбаев.Б “Жоғары математика” Алматы-1993ж

4 Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М., ГИТЛ, 1949

5 Koepf Wolfram, “Algorithmic Approach for Formal Fourier Series”, Switzerland. Том: 9. Выпуск: 3. Стр.: 365-389. DOI: 10.1007/s11786-014-0215-8. Опубликовано: OCT 2015.Идентификационный номер: WOS:000362427100007. ISSN: 1661-8270e. ISSN: 1661-8289

Ғылыми жетекші: аға оқытушы Л.Қ.Дюсембаева