С.Сейфуллиннің 125 жылдығына арналған **«Сейфуллин оқулары – 15: Жастар, ғылым, технологиялар: жаңа идеялар мен перспективалар»** атты халықаралық ғылыми-теориялық конференциясының материалдары = Материалы Международной научно-теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения – 15: Молодежь, наука, технологии – новые идеи и перспективы»**, приуроченной к 125-летию С.Сейфуллина. - 2019. - Т.II, Ч 1 - Б.142-145

ЕВКЛИД ЖӘНЕ ПРОЕКТИВТІК ГЕОМЕТРИЯНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

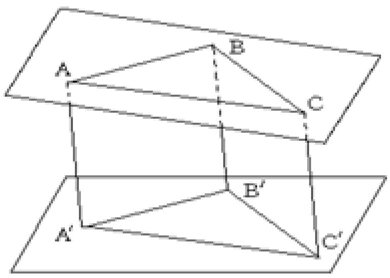
Какенова А.

Геометриялық кескіндерді жете оқып зерттегенде олардың көптеген қасиеттерімен кездесеміз. Мұндайда осындай қасиеттерді сұрыптау қажеттігі туындайды. Сұрыптау негізіне кескіндердің түрленулеріне қатысты қасиеттердің «*беріктілігі*» қабылданады. Кескіннің қарапайым түрленуіне оның кеңістіктегі қозғалуын немесе орын ауысуын жатқызуға болады.

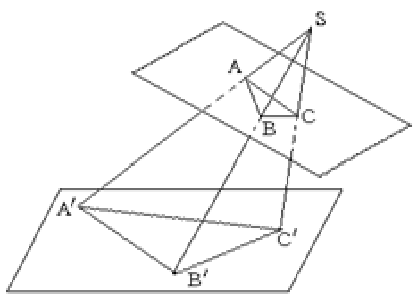
Мұндай түрленуде оның басқа кескіндерге қатысты орналасуын есептемегенде барлық геометриялық қасиеттері сақталады.

Алайда, практика жүзінде – сызба, сурет салу, кино, фотокәсіп және т.б., кескіндердің басқалай да түрленуі кездеседі. Олардың қатарына кескіндерді жазықтыққа параллель проекциялау және центрлі проекциялау жатады.

Егер екінші кескіннің барлық нүктелері бірден-бір проекциялау бағытында бірінші кескіннің сәйкес нүктелерінің параллель проекциялары болып табылса, онда бір кескін екіншісінен *параллель проекциялау* арқылы жасалған дейді (Сурет 1-ге сәйкес)



Сурет 1. Параллель проекциялау



Сурет 2. Центрлі проекция

Параллель проекциялауда түзулер түзулерге көшіп, нүктелердің түзуге тиістілігі, түзулердің параллельдігі және басқалай да кейбір қасиеттер сақталады.

Егер бір кескіннің әрбір нүктесі проекциялар жазықтығының, *S* және екінші кескіннің сәйкес нүктесі арқылы өтетін түзумен қиылысу нүктесі болып келсе, онда бір кескін екінші кескіннен «*проекция центрі*» деп аталатын *S* нүктесінен *центрлі проекция* арқылы жасалады дейді (Сурет 2-ге сәйкес). Центрлі проекциялауда түзулер түзулерге көшіп, нүктелердің түзуге тиістілігі және басқалай да кейбір қасиеттер сақталады.

Қарастырған түрлендірулерге сәйкес аналитикалық геометрияда кескіндер қасиеттерінің сұрыптамасы жүргізіледі.

Қандай да қозғалыста кескіндердің өзгермейтін қасиеттерін оның *метрикалық* қасиеттері, кез келген параллель проекциялауда кескіндердің өзгермейтін қасиеттерін *аффинді*, ал қандай да центрлі проекциялауда өзгермейтін қасиеттерін *проективт*і қасиеттері дейді. Аналитикалық геометрияда сәйкес қасиеттер тобын оқып зерттеу қандай да түрлендірулерде мәнін өзгертпейтін қарапайым шамаларды табу көмегімен жүргізіледі. Онда сәйкес қасиеттер тобы *инварианттар* деп аталатын осындай шамалар көмегімен анықталады.

Барлық қозғалыстардың қарапайым инварианты - кесінді ұзындығы – атап айтқанда осы кесіндінің ұштары болып келетін нүктелер арасындағы қашықтық болып табылады. Параллель проекциялаудың қарапайым инварианты түзудегі үш нүктенің жәй қатынасын қарастырудан туындайды.

Әрбір проективті қасиет – аффинді, ал әрбір аффинді қасиет – метрикалық екенін көрсетуге болады. Кері пікірдің дұрыс болмайтындығы айқын. Мәселен, кесінді ұзындығы параллель және центрлі проекциялауда, үш нүктенің жәй қатынасы центрлі проекциялауда сақталмауы мүмкін

Енгізілген кеңейтілген евклид жазықтығының маңызды бір кемшілігі нүктелері мен түзулерінің меншікті – меншіксізге бөлінуі. Меншікті, меншіксіз элементтердің қасиеттері көбіне ұқсас бола тұрса да, оларды бөліп-ажыратуға мәжбүр боламыз. Мәселен төмендегі 3-теореманы үш бөлікке бөлудің өзі осыдан.

1-анықтама. P_2 - нүктелер мен түзулер деп аталатын екі тектес элементтерден тұратын мынадай жиын болсын: нүктелер мен түзулер инциденттілік (әрбір нүкте және әрбір түзу үшін олар инциденттілікте ме, жоқ па пікірі белгілі болсын) арақатысымен байланысқан. Егер $g : P_2 \to \overline{S}$ (мұнда $\overline{S}$ дегеніміз түзулер мен жазықтықтар байламы) әрбір $A \in P_2$ нүктесін байламның түзуіне ал әрбір $a \in P_2$ түзуін байламның жазықтығына бейне-лейтін және инциденттілікті (екі жаққа бірдей) сақтайтын биективті бейнелеуі болса, P_2 жиынын *проективтік жазықтық* дейді.

$\overline{\psi} : \overline{R}_2 \to \overline{S}$ және $\overline{S} \to \overline{S}$ бейнелеулері биективті және инциденттілікті сақтайды. Сондықтан $\overline{R}_2$ кеңейтілген евклид жазықтығы мен $\overline{S}$ байламы проективтік жазықтықтар болып саналады.

$\overline{\psi}$ бейнелеуі инциденттілікті сақтайтындықтан проективтік жазықтықтың кейбір түзуіне тиісті нүктелер жиыны байлам жазықтығына тиісті түзулер шоғына бейнеленеді. Сондықтан келтірілген анықтамаға сәйкес проективтік жазықтықтағы түзуді оған инцидентті нүктелер жиыны ретінде қарастырып P_1 проективтік түзуі деп түсінеміз.

Проективтік жазықтық ұғымын енгізудің тиімділігі мәселен алғашқы тармақтың теоремасын дәлелдеуден көрінеді.

1-теорема. Проективтік жазықтықтың кез келген екі нүктесіне инцидентті түзу жалғыз.

Дәлелдеме. Евклид геометрия тіліндегі теорема ұйғарымы: байламның екі түрлі түзулеріне инцидентті жазықтық жалғыз. Мұндай тұжырымның әділеттілігі евклид геометрия аксиомаларынан шығады.

Бұл дәлелдеудің артықшылығы оның бөлшектенбеуінде. Күрделі сұрақтарды қарастырған жағдайда артықшылығы арта түседі.

Проективтік жазықтықтың қасиеттерін зерттеу кезінде (әсіресе сызбалар салғанда) оның дербес жағдайы болып келетін кеңейтілген евклид жазықтығын пайдаланамыз. Алайда мұндай көзқарастың кемшілігін де ұмытпаған жөн. Тәжірибесі шамалы оқырманды мына бір жәйт адастырмауы керек: кеңейтілген евклид жазықтығында нүктелер мен жазықтықтар инциденттілік арақатысынан өзгеше де проективтік гоеметрияда мағынасыз түзудің параллельдігі, кесіндінің конгруэнттілігі т.с. қатынаспен байланысады. Ал шын мәнісінде инциденттілік арақатысы ғана проективтік геометрияның негізінде жатады.

Сонымен, проективтік жазықтық көрсетілген әдіспен анықталған барлық «нүктелер» және «түзулер» жиынтығын кескіндейді.

Үйреншікті геометриялық терминологияны формальды енгізілген ұғымдарға қолданайық.

x_1, x_2, x_3 сандары теңдеуін қанағаттандырса (x_1: x_2: x_3) нүктесі түзуінде жатады дейміз. Бұл пікірдің өзін: түзуі (x_1: x_2: x_3) нүктесі арқылы өтеді деп те айтамыз.

«Нүкте» және «түзу» ұғымдары арасындағы мұндай қарапайым байланысты нүкте мен түзу инцидентті дей отыра, «инциденттілік» терминімен атаған ыңғайлы.

Сонымен, енгізген «нүкте» және «түзу» ұғымдары арасында «инциденттілік қатынасы» атанған жалғыз қатынас болады.

Проективтік жазықтықтағы қарапайым есептер

1-есеп. Түрлі қос түзуінің ортақ нүктесін табу керек.

$$\begin{aligned} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 &= 0 \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1).$$

Түзулер түрлі болғандықтан, бұл теңдеулердің шешімдер жиынтығы бір-бірінен өзгеше; демек,

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

матрица рангі 2-ге тең. Алгебра курсынан [6, А.Г. Курош, § 12] қарастырылатын жағдайда (1) жүйесінің барлық шешімдері осы матрицаның анықтауыштарына пропорционал:

$$x_0 : x_1 : x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

«Геометриялық» терминология таралуын жалғастыра келе, проективтік жазықтықтағы кез келген екі түзу бір нүктеде қиылысады деп айтуға болады.

2-есеп. Берілген түрлі M_1 ($x_0^{/} : x_1^{/}: x_2^{/}$) және M_2 ($x_0^{//} : x_1^{//}: x_2^{//}$) қос нүктесі арқылы өтетін түзуді анықтаңыз.

Түзуді

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \tag{3}$$

түрінде іздейміз. Есеп шартынан анықталуға тиіс a_0, a_1, a_2 белгісіздеріне қатысты

$$a_0 x'_0 + a_1 x'_1 + a_2 x'_2 = 0,$$
$$a_0 x''_0 + a_1 x''_1 + a_2 x''_2 = 0$$

теңдеулер жүйесіне келеміз.

Алдыңғы есепке ұқсас мұндай жүйенің барлық шешімдері

$$a_0 : a_1 : a_2 := \begin{vmatrix} x_1^{/} & x_2^{/} \\ x_1^{//} & x_2^{//} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_2^{/} & x_0^{/} \\ x_2^{//} & x_0^{//} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_0^{/} & x_1^{/} \\ x_0^{//} & x_1^{//} \end{vmatrix}$$

анықтауыштарына пропорционал болатындығы шығады.

Табылған a_0, a_1 және a_2 мәндерін (2.3.3) теңдеуіне қойып ізделінді түзудің теңдеуін

$$\begin{vmatrix} x_1^{/} & x_2^{/} \\ x_1^{//} & x_2^{//} \end{vmatrix} x_0 + \begin{vmatrix} x_2^{/} & x_0^{/} \\ x_2^{//} & x_0^{//} \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} x_0^{/} & x_1^{/} \\ x_0^{//} & x_1^{//} \end{vmatrix} x_2 = 0$$

түрінде немесе

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_{0^{/}} & x_1^{/} & x_2^{/} \\ x_0^{//} & x_1^{//} & x_2^{//} \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

түрінде табамыз.

Сонымен проективтік жазықтықтың кез келген түрлі қос нүктесі арқылы жалғыз түзу өтеді.

3-есеп. M_1 ($x_0^{/} : x_1^{/}: x_2^{/}$), M_2 ($x_0^{//} : x_1^{//}: x_2^{//}$), M_3 ($x_0^{///} : x_1^{///}: x_2^{///}$) нүктелер үштігінің бірден-бір түзуде жататындығы шартын табу керек.

Осы түзу (1) теңдеуімен берілсін. Онда a_0, a_1, a_2 коэффициенттерін анықтау үшін

$$a_0 x_0^{/} + a_1 x_1^{/} + a_2 x_2^{/} = 0,$$
$$a_0 x_0^{//} + a_1 x_1^{//} + a_2 x_2^{//} = 0,$$
$$a_0 x_0^{///} + a_1 x_1^{///} + a_2 x_2^{///} = 0$$

теңдеулер жүйесіне келеміз. Мұндай жүйенің нөлден өзгеше шешімі бар болуының қажетті және жеткілікті шарты

$$\begin{vmatrix} x_0^{/} & x_1^{/} & x_2^{/} \\ x_0^{//} & x_1^{//} & x_2^{//} \\ x_0^{///} & x_1^{///} & x_2^{///} \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

демек, анықтауыштың нөлге тең болуында. Ізделінді шарт та осы.

Осы қарапайым есептерді қарастыру «нүкте» және «түзу» ұғымдары арасындағы ұқсастықтың бар болуын растайды.

Жоғарыда тұжырымдалған анықтамалар мен есептер (және олардың шешімдері) бір-бірінен «нүкте» және «түзу» терминдерін бір-бірімен алмастырғаннан шығатынын көрсетуге болады. Осы ұқсастықтың жан-жақты анықталуы проективтік геометрияда үлкен маңызы бар «жазықтықтағы ауысымдылық принципі» деп аталатын қағиданың мазмұнын құрайды.

Енді бізге формальды енгізілген проективті жазықтық ұғымы мен әдеттегі жазықтық арасындағы өзгешілік неде екенін анықтау қажет. Дәл осы өзгешілікті ескере отыра әдеттегі жазықтықты «евклидті» дейді.

Әдебиеттер тізімі

1. Лопщиц.А.М. Аналитическая геометрия.- М: Учпедгиз 1948
2. Дубровин. Б.А., Новиков. С.П, Фоменко.А.Т, Современная геометрия: Методы и приложения. Т.1: Геометрия поверхностей, груп преобразований и полей. М: Добросовет, 2001,-33 б
3. Ильин. В.А , Позняк.Э.Г, Линеиная алгебра, -М: Наука, 1974-296б.
4. Искаков. М.У. Проективтік геометрия. 1-б, 2б - Алматы, 1960.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- М.: Наука, 1971..
6. Мусин А. Т. Векторлық және тензорлық есептеу. Қарағанды. 2007.
7. Gunn C.G., Doing Euclidean Plan geometry using projective geometric algebra. // advancesin Applied Clifford Algebras. 2017. 27(2), page 1203-1232.

Ғылыми жетекші:Дюсембаева Л.Қ. «Жоғары математика»кафедрасының аға оқытушысы