С.Сейфуллиннің 125 жылдығына арналған **«Сейфуллин оқулары – 15: Жастар, ғылым, технологиялар: жаңа идеялар мен перспективалар»** атты халықаралық ғылыми-теориялық конференциясының материалдары = Материалы Международной научно-теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения – 15: Молодежь, наука, технологии – новые идеи и перспективы»**, приуроченной к 125-летию С.Сейфуллина. - 2019. - Т.II, Ч 1 - Б.156-159

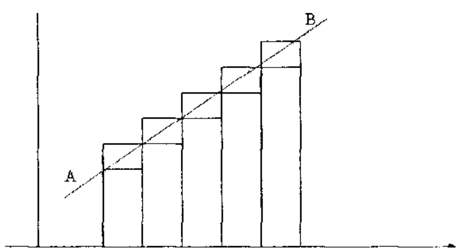
ГЕОМЕТРИЯНЫҢ АУДАН ЖӘНЕ КӨЛЕМ ЕСЕПТЕУ ФОРМУЛАЛАРЫН АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ АРҚЫЛЫ ҚОРЫТУ

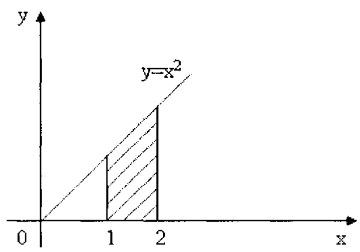
Елеухан Д.

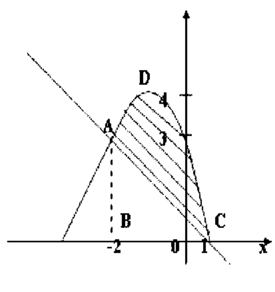
Математиканың кез-келген теориясының туындауына, күнделікті құбылыстар мен сұраныстар себеп болса, өз кезегінде, бұл теориялардың басқа да қолданыстары бар екені айқын. Анықталған интегралдың белгілі қолданыстарынан өзге де қолданыстарын қарастырамыз. Математикалық теориялар мен теоремаларға негізделе отырып зерделенген, зерттеу нәтижесін есептер шығаруда қолданысын көрсетеміз.

Анықталған интегралдың геометриялық мағынасына тоқталып кетейік. Ең әуелі $[a,b]$ аралығында $f(x)$ оң деп ұйғарайық. $y=f(x)$ теңдеуімен берілген қисықпен, абсцисса осімен параллель $x=a$, $x=b$ түзулерімен қоршалған фигураның ауданын қарастырайық.

(1) интегралдық қосындының әрбір қосылғышы $f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ табаны Δx_i-ге биіктігі $f(\varepsilon_i)$-ге тең тік төртбұрыштың ауданын береді; олай болса,







интегралдық қосындының өзі, барлық сегменттер $[x_i; x_{i+1}]$ $(i=0,1,2,...)$ табаны есебінде алынып, құрылған, биіктіктері $f(\varsigma_i)$ $(i=0,1,2,...)$ сандарына тең тік төртбұрыштардың (тікшелердің) аудандарының қосындысын береді [1].

Сондықтан барлық бөлшек сегменттердің ұзындықтарының үлкені нөлге ұмтылғандағы интегралдық қосындының шегі жоғарыдағы айтылған жазық фигураның ауданын өрнектейді.

1-мысал: $y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$ түзулерімен және $f(x) = x^2$ функциясымен шектелген қисық сызығын трапецияның S ауданын есептеп шығарамыз.

$f(x) = x^2$ функциясы үшін

$F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ функциясы алғашқы функциялардың бірі болып табылады.

Олай болса, $S = \int\limits_1^2 x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$ (кв.бірлік)

2-мысал: $y = 1 - x$ және $y = 3 - 2x - x^2$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданын есептеп шығарайық. Осы функциялардың графиктерін салайық, содан кейін олардың қиылысу нүктелерінің абциссаларын мына теңдеуден табайық: $1 - x = 3 - 2x - x^2$

$x = 1$ және $x = -2$ теңдеуінің шешуі. Ізделінген ауданы қисық сызықты трапециясы мен BAC үшбұрышы аудандарының айырмасы ретінде табуға болады.

$$Y = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b ydx \qquad (1)$$

Егер жоғарғы жағынан $y = f_1(x)^{/}, (a \le x \le b)$ қисықпен төменгі жағынан $y = f_1(x)^{/}, (a \le x \le b)$ қисықпен, бүйір жақтарынан $x = a$ және $x = b$ түзулерімен қоршалған болса, мұндай фигураның ауданы былай өрнектеледі [2]:

$$Y = \int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]d(x) \qquad (2)$$

Фигураны жоғарғы жағынан қоршап тұрған қисық параметрлік теңдеумен берілсін:

$$x = \varphi(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta) \qquad (3)$$
$$y = \psi(t)$$

Мұнда біз $\psi(t), \varphi(t)$ және $\psi^{/}(t)$ функцияларын $[\alpha, \beta]$ интервалында үздіксіз, ал $\psi(t)$ және $\psi^{/}(t)$функцияларын (α, β) аралығында оң деп ұйғарамыз. Одан басқа $\varphi(a) = a, \varphi(b) = b$ болуы қажет.

Айнымалы параметр t α-ден β-ға үздіксіз өзгергенде абсцисса $x = \varphi(t)$ a-дан b-ға дейін өсуі керек. Мұндай фигураның ауданы (1)-формуламен анықталады деп біз жоғарыда айттық. Айнымалы параметр t-ның α-дан β-ға дейін өсуімен бірге $x = \varphi(t)$ функция да а-дан в-ға үдейтін болғандықтан, (1)-ң интегралдығы айнымалыны х-ті әбден болады. Сөйтіп фигураның ауданы

$$Y = \int\limits_a^b \psi(t)\varphi^{/}(t)dt \qquad (4)$$

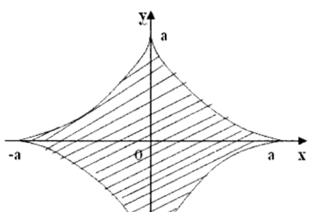
3-мысал: Астроиданың ауданын табу керек. Астроида деп төмендегі параметрлік теңдеумен берілген қисықты айтамыз.

$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$

(4)-формуланы қолданып табамыз.

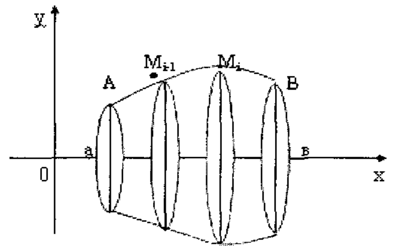
$$S = -4\int\limits_0^{\pi/2} a\sin^3 t 3a\cos^2 t \sin t dt = -12a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t dt \cos^2 dt = -12a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t dt + 12a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 t dt = \frac{3}{8}\pi a^2$$

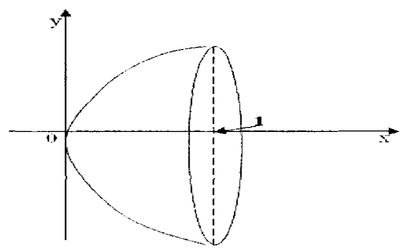
(кв.бірлік)



Цилиндр мен конустың бүйір беттерінің аудандары олардың жазбаларының ауданы арқылы анықталады. Алайда мұндай тәсіл кез келген бет үшін жарай бермейді. Мысалы, сфераны жазықтықта жаюға болмайды. Жалпы жағдайда айналу бетінің ауданын анықтайық та, оны есептеу формуласын келтірейік. $y = f(x), x \in [a,b]$ теңдеу мен анықталған қисықтың АВ доғасы берілсін. Мұндағы $f(x)$-үзіліссіз туындысы бар теріс емес функция $[a,b]$ кесіндісін нүктелермен ұзындықтары тең n бөлікке бөлейік.

$x_1 = a + \frac{b-a}{n} i \qquad (i = 0,1,2,...)$ нүктелері арқылы





ОУ осіне параллель түзулер жүргізейік, бұл түзулердің АВ-доғасымен қиылысу нүктелерін M_i деп белгілейік. $[a,b]$ кесіндісін жеткілікті түрде ұсақ бөліктерге бөлгенде, яғни n жетткілікті түрде үлкен болғанда сынық сызық пен АВ доғасын ОХ осі маңында айналдырудан пайда болған беттер ауданының бір-бірінен айырмашылығы өте аз болады. Айналудан шыққан бет n қисық конустың /немесе цилиндрдің/ бүйір бетінен тұрады. Оның ауданын біз есептей аламыз. AB доғасын $AM_1M_2...M_{n-1}B$ сынық сызығын айналдырудан шыққан бет ауданының $n \to \infty$ жағдайда шегі AB болатын доғасын айналдырудан шыққан беттің ауданы деп аталады. AB қисығын OX осі маңында айналудан шыққан беттің ауданы [2]:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2 dx} \qquad \text{немесе}$$

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y^2 dx} \qquad (1)$$

Формуласымен есептелетінін дәлелдеуге болады.

1-есеп: $y = 2\sqrt{x} \quad 0 \le x \le 1$ парабола доғасын OX осі маңында айналдырғанда пайда болған беттің ауданын табу керек.

$y' \equiv \frac{1}{\sqrt{x}}$ болғандықтан (1)-формула бойынша айналу бетінің ауданы:

$$S = 2\pi \int_0^1 2\sqrt{x^*}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}} dx} = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + x dx} = 4\pi^* \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

Егер AB қисығы $x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[a,b]$ параметрлік теңдеулерімен берілсе, онда

$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}|\psi(t)|\sqrt{(\varphi(t)^2+\psi(t)^2)}dt$ болады.

немесе $S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}|y|^*\sqrt{x\ \ +y^2dt}$

Мұндағы, $\varphi(t)$ мен $\psi(t)$ үзіліссіз туындысы бар функциялар.

2-есеп: $X=a(1-\sin t),\quad Y=a(1-\cos t),\quad t\in[0;2\pi]$ теңдеулерімен берілген циклоида доғасын OX осі маңына айналдырғанда пайда болған беттің ауданын есептеу керек. $X^/=a(1-\cos t), y^/=a\sin t$ болғандықтан (2)-ші формула бойынша

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin tdt}=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)dt}=$$

$$8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt$$

$$U=\cos\frac{t}{2}$$

ауыстыруын жасаймыз. $du=-0{,}5\sin\frac{t}{2}dt$

онда,

$$S=16\pi a^2\int_{-1}^{1}(1-u^2)du=\frac{64}{3}\pi a^2\quad \text{(кв.бірлік)}$$

Әдебиеттер тізімі

1. Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану –математика бағытындағы 10 – сыныбына арналған оқулық// А.Е.Әбілқасымова, К.Д.Шойынбеков, М.И.Есенова, З.А.Жұмағұлова. – Алматы : Мектеп, 2009, - 184 б.

2. Геометрия: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану – математика бағытындағы 11– сыныбына арналған оқулық//В.Гусев, Ж.Қайдасов, Ә. Қағазбаева. Алматы: Мектеп, 2011.-57 б

Ғылыми жетекші: Сейлова З.Т. «Жоғары математика» кафедрасының аға оқытушысы