

«Сейфуллин оқулары – 16: Жаңа формациядағы жастар ғылыми – Қазақстанның болашағы» атты халықаралық ғылыми-теориялық конференциясының материалдары = Материалы Международной научно-теоретической конференции «Сейфуллинские чтения – 16: Молодежная наука новой формации – будущее Казахстана». - 2020. - Т.І, Ч.3 - С.218-220

БӨЛІКТЕП ИНТЕГРАЛДАУДЫҢ ЕРЕКШЕ БІР ӘДІСІ

М.Ш. Тілепиев, Э.У. Уразмагамбетова, З.Т. Сейлова, Л.Қ. Дюсембаева

Жоғары техникалық оқу орындарында оқитын студенттер үшін «Жоғары математика» пәнінің «Бір айнымалылы функцияларды дифференциалдау және интегралдау» тарауының, оның ішінде «Анықталмаған интеграл» тақырыбының маңызы зор.

Бұл жұмыста жоғары математика курсының маңызды тарауларының бірі математикалық талдау бөлімінде оқытылатын интегралдық есептеудің тиімді әдістерінің бірі – бөліктеп интегралдау тақырыбын оқытудың ерекше бір әдісі қарастырылған. Көп жағдайларда бөліктеп интегралдау формуласын қолдану кезінде екі немесе одан көп рет қолдануға тура келеді. Ол есеп ұзағырақ есептеліп шығарылады. Сондықтан біз осы мақалада бөліктеп интегралдаудың күрделірек формуласын ұсынып отырмыз. Бұл формуланы қолдану арқылы есепті тезірек шығаруға болады.

Жоғары математика курсынан $[a, b]$ аралығында $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференциалданатын функциялары үшін анықталмаған интегралды бөліктеп интегралдау формуласы белгілі

$$\int uv' dx = \left| \begin{matrix} u & u' \\ v' & v \end{matrix} \right| = uv - \int u'v dx \quad (1)$$

Жалпы алғанда бөліктеп интегралдау әдісі айнымалыны ауыстырудан қиын және қолдану облысы тарлау болса да, тек қана осы әдіспен интегралданатын интегралдар бар.

Интегралдау кезінде айнымалыны ауыстыру тәсілі мен бөліктеп интегралдау әдісін тізбектеп (бірінен соң бірін) қолдану керек болатын жағдайлар да кездеседі.

Бөліктеп интегралдау формуласын қолдану үшін интеграл астындағы өрнекті көбейткіштерге жіктеудің жалпы ережесі оқулықтарда көп кездесе бермейді. Қандай жағдай болғанда да, интеграл астындағы өрнекті көбейткіштерге жіктеуде көбейткіш u -ды дифференциалдау, ал көбейткіш $v' dx$ -ты интегралдау нәтижесінде бөліктеп интегралдау формуласының оң жағындағы интегралдың интегралдануы жеңіл болуы ескерілуі қажет. Сонда да болса, мынадай жекеленген ескертулерді пайдалануға болады.

Егер интеграл астындағы өрнек көрсеткіштік немесе тригонометриялық функциялар мен көпмүшенің көбейтіндісі болса, онда көбейткіш u үшін көпмүшені алу керек. Ал егер де интеграл астындағы өрнек логарифмдік немесе кері тригонометриялық функциялар мен көпмүшенің көбейтіндісі болса, онда көбейткіш u үшін логарифмдік немесе кері тригонометриялық функцияны алу керек. Бөліктеп интегралдауды қолданудың өз әдістері бар.

Енді $uv' - u'v$ өрнегін қарастырайық. Оның туындысы

$$(uv' - u'v)' = u'v' + uv'' - u''v - u'v' = uv'' - u''v$$

немесе $uv'' = (uv' - u'v)' + u''v$

Екі жағын интегралдасақ, онда

$$\int uv'' dx = uv' - u'v + \int u''v dx \quad (2)$$

формуласын алуға болады. Бұл формуланы екінші ретті бөліктеп интегралдау формуласы дейді [1].

Жалпы жағдайда бөліктеп интегралдау формуласын былай жазуға болады

$$\begin{aligned} \int uv^{(n)} dx &= uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \dots + (-1)^{n-3} u^{(n-3)}v'' + \\ &+ (-1)^{n-2} u^{(n-2)}v' + (-1)^{n-1} u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}v dx \end{aligned} \quad (3)$$

Бұл формуланы n -ші ретті бөліктеп интегралдау формуласы дейді [2].

Мысалдар қарастырайық:

1. $\int x^2 \cos bxdx$ интегралын (2) формуласының көмегімен есептеу керек.

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos bxdx &= \left| \begin{array}{lll} u = x^2 & u' = 2x & u'' = 2 \\ v'' = \cos bx & v' = -\frac{1}{b} \sin bx & v = -\frac{1}{b^2} \cos bx \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^2}{b} \sin bx + \frac{2x}{b^2} \cos bx - \frac{2}{b^2} \int \cos bxdx = \frac{x^2}{b} \sin bx + \frac{2x}{b^2} \cos bx - \\ &- \frac{2}{b^3} \sin bxdx = \left(\frac{x^2}{b} - \frac{2}{b^3} \right) \sin bx + \frac{2x}{b^2} \cos bx + C. \end{aligned}$$

2. $\int x^n e^{ax} dx$ интегралын (3) формуласының көмегімен шығарайық.

$$\begin{aligned} &\int x^n e^{ax} dx = \\ &= \left| \begin{array}{llll} u = x^n & u' = nx^{n-1} & \dots & u^{(n-1)} = n(n-1)\dots 3 \cdot 2x & u^{(n)} = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 \\ v^{(n)} = e^{ax} & v^{n-1} = \frac{1}{a} e^{ax} & \dots & v' = \frac{1}{a^{n-1}} e^{ax} & v = \frac{1}{a^n} e^{ax} \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^n}{a} e^{ax} - \frac{n}{a^2} x^{n-1} e^{ax} + \frac{n(n-1)}{a^3} x^{n-2} e^{ax} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)\dots 4 \cdot 3}{a^{n-1}} x^2 e^{ax} + \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2}{a^n} x e^{ax} + (-1)^n \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{a^n} \int e^{ax} dx = \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{x^n}{a} - \frac{n}{a^2} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^3} x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)\dots 4 \cdot 3}{a^{n-1}} x^2 + \right. \\ \left. + (-1)^{n-1} \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2}{a^n} x + (-1)^n \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{a} \right] e^{ax} + C.$$

Оқырмандарға $\int x^2 e^{ax} dx$, $\int x^2 \sin bxdx$, $\int x^n \sin bxdx$, $\int x^n \cos bxdx$ интегралдарын өздеріне шығаруды ұсынамыз.

Ескерту.

$$\int x^n \ln x dx, \int x \arcsin kx dx, \int x \arctg kx dx, \int \sqrt{x^2 + a^2} dx, \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

интегралдарына (3) формуласын қолдану тиімсіз. Оларға (1) формуласын екі рет қолдану керек [3,4].

Кейбір жағдайларда бөліктеп интегралдауды екі немесе одан да көп рет қолдануға тура келеді, ол есепті ұзағырақ есептеу керек болады. Ұсынылып отырған әдіс интегралдау кезінде бөліктеп интегралдауды көп рет қолдануға тура келген кезде ыңғайлы деп есептейміз.

Бөліктеп интегралдау формуласын қолдану үшін интеграл астындағы өрнекті көбейткіштерге жіктеудің жалпы ережесі оқулықтарда көп кездесе бермейді. Қандай жағдай болғанда да, интеграл астындағы өрнекті көбейткіштерге жіктеуде көбейткіш u -ды n -рет дифференциалдау, ал көбейткіш $v^{(n)}$ -сын n -рет интегралдау нәтижесінде бөліктеп интегралдау формуласының оң жағындағы интегралдың интегралдануы жеңіл болуы ескерілуі қажет. Бұл формуланы қолдану арқылы есепті тезірек шығаруға болады.

Әдебиеттер тізімі

- 1 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Часть 1. 2011.
- 2 Тілепиев М.Ш., Уразмагамбетова Э.У., Жароева А.Г. Анықталмаған интегралдағы бөліктеп интегралдаудың әдістерінің бірі // С. Сейфуллин атындағы ҚазАТУ Ғылым жаршысы(пәнарадык).- №3(98). 2018–Астана, 179-185б..
- 3 Hoseana, J. Extending the substitution method for integration. The Mathematical Gazette. - Volume 101, Issue 552. November 2017. - pp. 538-541.
- 4 Postma, T. C.; White, J. G. Students' perceptions of vertical and horizontal integration in a discipline-based dental school / European journal of dental education.-Том: 21.- Выпуск: 2.- Стр.: 101-107. MAY 2017.