«Сейфуллин оқулары – 16: Жаңа формациядағы жастар ғылыми – Қазақстанның болашағы» атты халықаралық ғылыми-теориялық конференциясының материалдары = Материалы Международной научно-теоретической конференции «Сейфуллинские чтения – 16: Молодежная наука новой формации – будущее Казахстана. - 2020. - Т.II. - Б.364-366.

ЖЫЛУ КОНВЕКЦИЯСЫНЫҢ ҮШ ӨЛШЕМДІ ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ ШЕШІМІНЕ АРНАЛҒАН САНДЫҚ АЛГОРИТМДЕРІН ЗЕРТТЕУ

Асқаров І., Бейсебай П.Б.

Жұмыс жылу процестерінің су динамикасында математикалық пішіндеу сұрақтарына арналған, нақты айтқанда жылу конвекциясының үш өлшемді теңдеулерінің шешіміне арналған сандық алгоритмдерінің математикалық негізделуіне және өңделуіне негізделген.

Жылу конвекция есептерін негізге ала отырып айқындалмаған итерациялық сұлбаларға теориялық талдау жүргізу келе оның есептеу әдісін қорыту.

Металлургия, атом жылу энергетикасы, құрылыстық техника, химиялық технологиясы, сонымен қатар экологиямен байланысты есептердегі жылу процестерінің теориялық және тәжірибелік тұрғыдан зерттеулердің дамуы жылу конвекцияның сұйық және газ механикасының дербес бөлімдерінің бірі ретінде қарастырылуына әкелді. Атап айтсақ, мысалға, аталған жұмыстағы мағлұматтар технолог мамандарына қатысты.

– жылу мөлшерінің азаюын шектеу;
– жылуалмасудың жүргізілуін;
– қажетті материалды дұрыс таңдай білу сияқты бірқатар мәселелерді шешуде қолданыс тапты.

Қазіргі уақытта ақпараттық және есептеуіш технологиялардың дамуы қоршаған ортадағы механиканың сандық шешімінің мүмкіншіліктерін тудырды, соның ішінде ЭЕМ-да гидродинамика есептерін ақырлы айырымдар әдісімен шығару. Бұл бастама, жылу конвекцияның сандық шешімі өз дамуында математиктер мен механиктердің үлкен назарын аударды, әрі жылу конвекцияның негізіндегі теңдеулердің сандық үлгілеу әдістемелік аспектілері өте күрделі және аз өңделгені байқалды.

[1-5] жұмыстарында жылу конвекциясы теңдеуінің зерттелуіне арналған, мұнда маңызды сызықтық емес түсіндірулерді талап ететін әртүрлі: тұйық қуыстар стационарлық конвективті қозғалыстардың температураларының үлкен айырымдары жанында құрылымы, тепе-теңдік тұрақтылықтары немесе стационарлық қозғалыстарды дағдарыстың нәтижесінде көрінетін екінші қайтара ағым, периодтық модуляция параметрі нәтижесінде көрінетін қозғалыс есептері қаралды. Е.Л. Тарунинның жұмысында сұйықты квадрат қуыста конвективті қыздырғанда шекарасында температура кенет өзгеретін және одан әрі тұрақты болатын есебі де шешілген.

Ақырлы айырымдар әдісі конвекция теориясындағы стационарлық емес есептерді нәтижелі түрде шешуге де рұқсат етеді.

Қазіргі уақытта еркін конвекцияның әртүрлі математикалық үлгілері бар. Біздің қарастыратын модель - Навье - Стокс теңдеуі мен жылу өткізгіштік теңдеулерінен [1] құралған Буссинеска теңдеулер жүйесі.

Аз мағыналы тор параметрлерінің таратылынған сұлбаларының шектелген шешімін көрсететін априорлық бағалаулары алынған. $n \to \infty$ шешіміне келетін стационарлық есептің жинақтылық сұрақтары қаралған. Өлшемсіз өзгергіштерде жазылған $0 < t \le T < \infty$ болғанда $D = \{0 \le x_\alpha \le 1,\ \alpha = 1,2,3\}$ -ның 3 дәрежесіндегі Буссинеска жақындауында жылу конвекциясының теңдеулерін қарастырамыз.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\ \nabla)\vec{u} + gradp = \Delta\vec{u} - \frac{Gr\vec{g}}{|\vec{g}|}\theta + \vec{f}(t,x), \tag{1}$$

$$div\vec{u} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\theta = \frac{1}{Pr}\cdot\Delta\theta + g(t,x), \tag{3}$$

мұндағы $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{f}(t,x)$, $g(t,x)$ - берілген функциялар, Gr – Грасгоф саны, $\Pr$ - Прандтль саны, $\theta(t,x)$ – температура, $\vec{u} = (u,v,w)$ - жылдамдық векторы $(u = u(t,x), v = v(t,x), w = w(t,x))$, және $p(t,x)$ – қысым, $\vec{g}$ - ауырлық күші.

Шектік шарт: $\vec{u} = \theta = 0$ при $x \in \partial D$

(4)

Бастапқы шарт:

$$\vec{u}(0,x_1,x_2,x_3) = \vec{u}^0(x_1,x_2,x_3),\ \theta(0,x_1,x_2,x_3) = \theta^0(x_1,x_2,x_3), \tag{5}$$

Тор айырымдарын анықтаймыз: $t_n = \tau n$, $n = 0,...,\frac{T}{\tau} = M$,

$$\overline{D_h} = \left\{ (kh, lh, mh),\ k,l,m = \overline{0,N},\ Nh = 1 \right\}$$

$$\overline{D_{hu}} = \left\{ \left((k + 1/2)h, lh, mh\right), k = \overline{0,N-1}, l,m = \overline{0,N} \right\}$$

$$\overline{D_{hv}} = \left\{ \left(kh, (l + 1/2)h, mh\right), k,m = \overline{0,N},\ l = \overline{0,N-1} \right\}$$

$$\overline{D_{hw}} = \left\{ \left(kh, lh, (m + 1/2)h\right), k,l = \overline{0,N},\ m = \overline{0,N-1} \right\}.$$

Қысым мен температура мәндерінің жақындауын D_h тор түйіндерінде анықтаймыз. Ал әртүрлі жылдамдық векторының сәйкесінше

$$\vec{u} = (u_{k+1/2\,lm}, v_{kl+1/2\,m}, w_{klm+1/2})'$$

торларының түйіндерінде D_{hu}, D_{hv}, D_{hw}.

Шектелген мағыналар жылдамдық векторының нормальдық компоненттері облыс қабырғасынан жарты қадамда нольге тең деп есептейміз, яғни:

$$u_{1/2\,lm} = u_{N-1/2\,lm} = 0, \qquad l, m = 0,1,\ldots, N,$$

$$v_{k\,1/2\,m} = v_{kN-1/2\,m} = 0, \qquad k, m = 0,1,\ldots, N,$$

$$w_{kl\,1/2} = w_{klN-1/2} = 0, \qquad k, l = 0,1,\ldots, N.$$

Тығыздық теңдеуін есепке ала отырып, шектелген шерттардың шекарасы, екінші ретті аппроксимацияға сай болатынын байқауға болады.

Теңдеулер жүйесінің аппроксимациясына арналған (1)-(3) келесі сұлбаны қарастырамыз.

$$\frac{\vec{u}^{n+1/2} - \vec{u}^{n}}{\tau} + L_{h,\vec{u}}\vec{u}^{n+1/2} + \overline{grad}_h\, p^n = \widetilde{\Delta}_h \vec{u}^{n+1/2} - \frac{Gr\vec{g}}{|\vec{g}|}\theta^{n+1} + \vec{f}^{\,n}(x),$$

(6)

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^{n+1/2}}{\tau} + \overline{grad}_h\left(p^{n+1} - p^n\right) = 0,$$

(7)

$$\underline{div}_h \vec{u}^{\,n+1} = 0,$$

(8)

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\tau} + L_{h,\theta}\theta^{n+1} = \frac{1}{\Pr}\widetilde{\Delta}_h \theta^{n+1} + g^n(x),$$

(9)

бастапқы және біркелкі шектік шарттарына сәйкес келетін, мұндағы $\overline{grad}_h p = \{p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3}\}$, яғни аппроксимацияға арналған оң айырымдық формулалары; $\underline{div}_h \vec{u} = u_{\bar{x}_1} + v_{\bar{x}_2} + w_{\bar{x}_3}$, яғни дивергенция операторы аппроксимациясына арналған сол айырымдық формулалары қолданылған.

$\widetilde{\Delta}_h$ - Самарский формуласымен конвективті қосындылардың апроксимациясы Лапластың айырымдылық операторына сәйкес келеді,

$L_{h,\vec{u}}$, $L_{h,\theta}$ - айырымдылық операторлары, конвективті қосындылардың апроксимациясына сәйкес келуші және энергетикалық бейтарап шарттарды қанағаттандырушы, яғни

$$(L_{h,\vec{u}}\vec{u},\vec{u}) = (L_{h,\theta}\theta,\theta) = 0 .$$

Итерациялық алгоритмдердің математикалық негіздемелері үшін есептеу математикасы мен функциялық талдау әдістері қолданылды. Қарастырылған алгоритмдердің жинақтылығы мен жинақтылық жылдамдықтары бағаларының дәлелдемелері априорлық бағалар әдістерімен алынатын функциялық теңсіздіктер көмегімен жүргізілді.

Ұсынылған алгоритмдердің мүмкіндіктерін көрсету үшін есептеу тәжірибесі жүргізіледі.

Әдебиеттер тізімі

1 Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. - Иркутск: Издательство Иркутского университета. 1990.-228с.

2 Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. -656с.

3 Бейсебай П.Б., Данаев Н.Т. «О численном решении свободной конвекции при подогреве сбоку» Вестник КазНУ, Серия математика, механика, информатика. - 2007.-№1(52).-С.71-80.

4 Beisebay P.B. **On an implicit iterative splitting scheme for the problems of free thermal convection** Life Sci. J., 11 (8s) (2014), pp. 344-349.

5 Beisebay P.B., Aruova B., Akzhigitov E., Tilepiev M.Sh.**About one splitting scheme for the nonlinear problem of thermal convection** Int. J. Heat Mass Transfer, 104 (2017), pp. 260-266.