«Сейфуллин оқулары – 16: Жаңа формациядағы жастар ғылыми – Қазақстанның болашағы» атты халықаралық ғылыми-теориялық конференциясының материалдары = Материалы Международной научно-теоретической конференции «Сейфуллинские чтения – 16: Молодежная наука новой формации – будущее Казахстана. - 2020. - Т.II. - С.

ЕРІКТІ КОНВЕКЦИЯНЫҢ АЙҚЫНДАЛМАҒАН ИТЕРАЦИЯЛЫҚ АЙЫРЫМДЫҚ СҰЛБАСЫНЫҢ ЗЕРТТЕЛУІ

Ділдабек И.Б., Бейсебай П.Б.

Айқындалмаған итерациялық айырымдық сұлбаның сызықтық және сызықтық емес теңдеулері үшін тұрақтылық және жинақтылық теоремалары дәлелденіп, жинақтылық жылдамдығының бағалары алынған [1-3].

Алынған зерттеу нәтижелері оқыту процесі барысындағы арнайы курстық сағаттарда, дипломдық жұмыстарын орындауларда қолданыс табады. Жұмыста алынған ерікті конвекцияның стационар есебін сандық шешудің итерациялық алгоритмінің жинақталу жылдамдығының априорлық бағалаулары ұсынылған әдістердің тиімділігі туралы айтуға мүмкіндік береді. Априорлық бағалауларды алу әдістері сұйық динамикасының сызықтық емес теңдеулері үшін құрылған айырымдық сұлбаларын зерттеулерде маңызды бола алады және математикалық физиканың сызықтық емес есептерінің сандық шешу теориясын әрі қарай дамытуы болып табылады.

Зерттеу нәтижелерін жылу-масса алмасу есептерін шешуді автоматтандыру үшін ақпараттық жүйелерді құруда және математика, механика, сондай-ақ IT-технологиясы мамандықтары бойынша оқитын студенттер қолдана алады.

Есептердің айырымдық шешімдерінің

$$\frac{\vec{u}^{n+1/2}-\vec{u}^{n}}{\tau}+L_{h,\vec{u}}\vec{u}^{n+1/2}+\overline{grad}_h\, p^n=\widetilde{\Delta}_h\vec{u}^{n+1/2}-\frac{Gr\vec{g}}{|\vec{g}|}\theta^{n+1}+\vec{f}^{\,n}(x),$$

(1)

$$\frac{\vec{u}^{n+1}-\vec{u}^{n+1/2}}{\tau}+\overline{grad}_h\left(p^{n+1}-p^n\right)=0,$$

(2)

$$\underline{div}_h\vec{u}^{n+1}=0,$$

(3)

$$\frac{\theta^{n+1}-\theta^{n}}{\tau}+L_{h,\theta}\theta^{n+1}=\frac{1}{\Pr}\widetilde{\Delta}_h\theta^{n+1}+g^n(x),$$

(4)

бастапқы берілген және оң бөлімдері тұрақты екенін көрсетеміз.

(1) өрнегінің екі бөлігін $2\tau\vec{u}^{\,n+1/2}$-ге скаляр көбейтіп және $L_{h,\vec{u}}$ - ның энергетикалық бейтараптығын ескерсек:

$$\left\|\vec{u}^{n+1/2}\right\|^2-\|\vec{u}\|^2+\left\|\vec{u}^{n+1/2}-\vec{u}^n\right\|^2+2\tau\left(\overline{grad_h}\,p^n,\vec{u}^{n+1/2}\right)+2\tau\left\|\widetilde{\nabla}_h\vec{u}^{n+1/2}\right\|^2=-2\tau\frac{Gr}{|\vec{g}|}\left(\vec{g}\theta^{n+1},\vec{u}^{n+1/2}\right)+2\tau\left(\vec{f}^n,\vec{u}^{n+1/2}\right).$$

(5)

(2) өрнегін $\vec{u}^{\,n+1}+\vec{u}^{\,n+1/2}$ қосындысына скаляр көбейтсек:

$$\left\|\vec{u}^{n+1}\right\|^2-\left\|\vec{u}^{n+1/2}\right\|^2+\tau(\overline{grad_h}\,p^{n+1}-\overline{grad_h}\,p^n,\vec{u}^{\,n+1}+\vec{u}^{\,n+1/2})=0$$

(6)

(2) теңдеуінің екі бөлігін скаляр $\tau^2\left(\overline{grad}_h\,p^{n+1}+\overline{grad}_h\,p^n\right)$ көбейтіп, мына теңдеуді аламыз

$$\tau\left(\vec{u}^{\,n+1}-\vec{u}^{\,n+1/2},\overline{grad_h}\,p^{n+1}+\overline{grad}_h\,p^n\right)+\tau^2\left(\left\|\overline{grad_h}\,p^{n+1}\right\|^2-\left\|\overline{grad}_h\,p^n\right\|^2\right)=0 \qquad (7)$$

(6) және (7) қатынастарды қоса отырып, мына теңдеуді аламыз

$$\left\|\vec{u}^{\,n+1}\right\|^2-\left\|\vec{u}^{\,n+1/2}\right\|^2+\tau^2\left(\left\|\overline{grad}_h\,p^{n+1}\right\|^2-\left\|\overline{grad}_h\,p^n\right\|^2\right)+2\tau\left(\vec{u}^{\,n+1},\overline{grad}_h\,p^{n+1}\right)-2\tau\left(\vec{u}^{\,n+1/2},\overline{grad}_h\,p^n\right)=0.$$

Осыдан, тығыздық теңдеуін ескере отырып (3) өрнегін келесі түрге келтіреміз

$$\left\|\vec{u}^{\,n+1}\right\|^2+\tau^2\left\|\overline{grad}_h\,p^{n+1}\right\|^2-2\tau(\vec{u}^{\,n+1/2},\overline{grad}_h\,p^n)=\left\|\vec{u}^{\,n+1/2}\right\|^2+\tau^2\left\|\overline{grad}_h\,p^n\right\|^2$$

(8)

(8) және (5) теңдіктерін бөліктеп қосып, төмендегідей түрге келтіреміз

$$\left\|\vec{u}^{n+1}\right\|^2+\tau^2\left\|\overline{grad_h}\,p^{n+1}\right\|^2+\left\|\vec{u}^{n+1/2}-\vec{u}^n\right\|^2+2\tau\left\|\widetilde{\nabla}_h\vec{u}^{n+1/2}\right\|^2=\left\|\vec{u}^n\right\|^2+\tau^2\left\|\overline{grad_h}\,p^n\right\|^2-2\tau\frac{Gr}{|\vec{g}|}\left(\vec{g}\theta^{n+1},\vec{u}^{n+1/2}\right)+2\tau\left(\vec{f}^n,\vec{u}^{n+1/2}\right)\cdot$$

Коши-Буняковскийдің теңсіздігін қолдана отырып, екі соңғы оң бөлімнің қосындысы келесі түрге келеді

$$\left\|\vec{u}^{n+1}\right\|^2+\tau^2\left\|\overline{grad_h}\,p^{n+1}\right\|^2+\left\|\vec{u}^{n+1/2}-\vec{u}^n\right\|^2+2\tau\left\|\widetilde{\nabla}_{h,\vec{u}}\vec{u}^{n+1/2}\right\|^2\le\left\|\vec{u}^n\right\|^2+\tau^2\left\|\overline{grad_h}\,p^n\right\|^2+2\tau Gr\left\|\theta^{n+1}\right\|\left\|\vec{u}^{n+1/2}\right\|+2\tau\left\|\vec{f}^n\right\|\left\|\vec{u}^{n+1/2}\right\|.$$

(9)

Белгілі теңсіздіктерді қолдана отырып

$$\delta_0 \|\vec{u}\|^2 \le \|\nabla \vec{u}\|^2 \text{ және } a \cdot b \le \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon},$$

мұндағы $\delta_0 = 4\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2} = \frac{12}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}$ - айырымдық Лаплас операторының ең аз меншікті саны, ε - кез-келген оң сан, бағалауларды өткіземіз:

$$\|\theta^{n+1}\| \left\|\vec{u}^{n+1/2}\right\| \le \frac{1}{\sqrt{\delta_0}} \left\|\tilde{\nabla}_h \theta^{n+1}\right\| \frac{1}{\sqrt{\delta_0}} \left\|\tilde{\nabla}_h \vec{u}^{n+1/2}\right\| \le \frac{1}{\delta_0}\left(\varepsilon_1 \left\|\tilde{\nabla}_h \vec{u}^{n+1/2}\right\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\left\|\tilde{\nabla}_h \theta^{n+1}\right\|^2\right),$$

$$\left\|\vec{f}^n\right\| \left\|\vec{u}^{n+1/2}\right\| \le \frac{1}{\sqrt{\delta_0}}\left(\varepsilon_2 \left\|\tilde{\nabla}_h \vec{u}^{n+1/2}\right\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2}\left\|\vec{f}^n\right\|^2\right),$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - дербес оң сандар).

Бұл бағалауларды (9) өрнегінің екі соңғы оң бөлімінің қосындысына қолдансақ

$$\left\|\vec{u}^{n+1}\right\|^2 + \tau^2 \left\|\overline{grad}_h p^{n+1}\right\|^2 + \left\|\vec{u}^{n+1/2} - \vec{u}^n\right\|^2 + 2\tau \left\|\tilde{\nabla}_{h,\vec{u}} \vec{u}^{n+1/2}\right\|^2 \le \left\|\vec{u}^n\right\|^2 + \tau^2 \left\|\overline{grad}_h p^n\right\|^2 +$$

$$+ 2\tau Gr \frac{1}{\delta_0}\left(\varepsilon_1 \left\|\tilde{\nabla}_h \vec{u}^{n+1/2}\right\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\left\|\tilde{\nabla}_h \theta^{n+1/2}\right\|^2\right) + 2\tau \frac{1}{\sqrt{\delta_0}}\left(\varepsilon_2 \left\|\tilde{\nabla}_h \vec{u}^{n+1/2}\right\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2}\left\|f^n\right\|^2\right).$$

Өрнекті қорта келсек

$$\left\|\vec{u}^{n+1}\right\|^2 + \tau^2 \left\|\overline{grad}_h p^{n+1}\right\|^2 + \left\|\vec{u}^{n+1/2} - \vec{u}^n\right\|^2 + 2\tau\left(1 - \frac{\varepsilon_1 Gr}{\delta_0} - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\delta_0}}\right)\left\|\tilde{\nabla}_h \vec{u}^{n+1/2}\right\|^2 \le$$

$$\le \left\|\vec{u}^n\right\|^2 + \tau^2 \left\|\overline{grad}_h p^n\right\|^2 + \frac{\tau Gr}{2\varepsilon_1 \delta_0}\left\|\tilde{\nabla}_h \theta^{n+1}\right\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon_2 \sqrt{\delta_0}}\left\|\vec{f}^n\right\|^2$$

(10)

(4) өрнегін $2\tau\theta^{n+1}$ -ге скаляр көбейтіп және θ температурасы үшін мынаны аламыз

$$\left\|\theta^{n+1}\right\|^2 - \left\|\theta^n\right\|^2 + \left\|\theta^{n+1} - \theta^n\right\|^2 + \frac{2\tau}{\Pr}\left\|\tilde{\nabla}_h \theta^{n+1}\right\|^2 = 2\tau(\vec{g}^n(x), \theta^{n+1}).$$

(11)

Одан соң, келесі теңсіздіктер көмегімен

$$\left|(g^n, \theta^{n+1})\right| \le \left\|g^n\right\| \left\|\theta^{n+1}\right\| \le \frac{1}{\sqrt{\delta_0}}\left\|g^n\right\| \left\|\tilde{\nabla}_{h,\theta} \theta^{n+1}\right\| \le \frac{\sqrt{\Pr}}{\sqrt{\delta_0}}\left\|\vec{g}^n\right\| \frac{1}{\sqrt{\Pr}}\left\|\tilde{\nabla}_{h,\theta} \theta^{n+1}\right\| \le \varepsilon_3 \frac{1}{\Pr}\left\|\tilde{\nabla}_{h,\theta} \theta^{n+1}\right\|^2 + \frac{\Pr}{4\delta_0 \varepsilon_3}\left\|\vec{g}^n\right\|^2,$$

мұндағы ε_3 - кез-келген оң сан, осыдан

$$\left\|\theta^{n+1}\right\|^2 - \left\|\theta^n\right\|^2 + \left\|\theta^{n+1} - \theta^n\right\|^2 + \frac{2\tau}{\Pr}(1-\varepsilon_3)\left\|\tilde{\nabla}_{h,\theta}\theta^{n+1}\right\|^2 \le \frac{\tau \Pr}{2\delta_0\varepsilon_3}\left\|\vec{g}^{\,n}\right\|^2 . \tag{12}$$

$0 < \varepsilon_3 < 1$ деп, $\dfrac{Ra}{4\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)\delta_0}$ қатынасына (12) екі бөлігін көбейтіп, мұндағы $Ra = Gr \Pr$ - Релея саны, (10) теңсіздігіне алынған теңсіздікті бөліктеп қосып

$$\frac{\tau Gr}{2\varepsilon_1\delta_0}\left\|\tilde{\nabla}_h\theta^{n+1}\right\|^2 = \frac{2\tau}{\Pr}(1-\varepsilon_3)\frac{Gr \Pr}{4\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)\delta_0}\left\|\tilde{\nabla}_{h,\theta}\theta^{n+1}\right\|^2 ,$$

теңсіздікті аламыз

$$\left\|\vec{u}^{n+1}\right\|^2 + \tau^2\left\|\overline{grad}_h p^{n+1}\right\|^2 + 2\tau\left(1 - \frac{\varepsilon_1 Gr}{\delta_0} - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\delta_0}}\right)\left\|\tilde{\nabla}_h\vec{u}^{n+1/2}\right\|^2 + \left\|\vec{u}^{n+1/2} - \vec{u}^n\right\|^2 + \frac{Ra}{4\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)\delta_0}\left(\left\|\theta^{n+1}\right\|^2 + \left\|\theta^{n+1} - \theta^n\right\|^2\right)$$

$$\le \left\|\vec{u}^n\right\|^2 + \tau^2\left\|\overline{grad}_h p^n\right\|^2 + \frac{Ra}{4\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)\delta_0}\left\|\theta^n\right\|^2 + \frac{\tau}{2\sqrt{\delta_0}\varepsilon_2}\left\|\vec{f}\right\|^2 + \frac{Ra \Pr \tau}{8\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)\delta_0^2\varepsilon_3}\left\|\vec{g}^n(x)\right\|^2 .$$

Белгілеу енгізсек

$$E^n = \left\|\vec{u}^n\right\|^2 + \tau^2\left\|\overline{grad}_h p^n\right\|^2 + \frac{Ra}{4\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)\delta_0}\left\|\theta^n\right\|^2 \cdot$$

$$E^{n+1} + 2\tau\left(1 - \frac{\varepsilon_1 Gr}{\delta_0} - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\delta_0}}\right)\left\|\tilde{\nabla}_h\vec{u}^{n+1/2}\right\|^2 + \left\|\vec{u}^{n+1/2} - \vec{u}^n\right\|^2 +$$

$$+\frac{Ra}{4\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)\delta_0}\left\|\theta^{n+1} - \theta^n\right\|^2 \le E^n + \frac{\tau}{2\sqrt{\delta_0}\varepsilon_2}\left\|\vec{f}^{\,n}\right\|^2 + \frac{Ra \Pr \tau}{8\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)\delta_0^2\varepsilon_3}\left\|\vec{g}^{\,n}\right\|^2 , \tag{13}$$

мұндағы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ дербес оң сандар, $0 < \varepsilon_3 < 1$. Шарттардан $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ таңдаймыз:

$$1 - \frac{\varepsilon_1 Gr}{\delta_0} - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\delta_0}} \ge \delta > 0 \cdot$$

Онда

$$E^{n+1} \le E^n + \frac{\tau}{2\sqrt{\delta_0}\varepsilon_2}\left\|\vec{f}^{\,n}\right\|^2 + \frac{Ra \Pr \tau}{8\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)\delta_0^2\varepsilon_3}\left\|\vec{g}^{\,n}\right\|^2 \cdot$$

Берілген теңсіздікке ендігі қолданатын амал n қадамдар арқылы мына теңсіздікке әкеледі

$$E^n \le E^0 + \frac{\tau}{2\sqrt{\delta_0 \varepsilon_2}}\left(\left\|\vec{f}^{n-1}\right\|^2 + \left\|\vec{f}^{n-2}\right\|^2 + \ldots + \left\|\vec{f}^{0}\right\|^2\right) + \frac{Ra\Pr\tau}{8\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)\delta_0^2\varepsilon_3}\left(\left\|g^{n-1}\right\|^2 + \left\|g^{n-2}\right\|^2 + \ldots + \left\|g^{0}\right\|^2\right).$$

Осы арадан, белгілеу енгізе отырып

$$\left\|\vec{f}\right\|_* = \max_{0\le n\le M}\left\|\vec{f}^{\,n}\right\|, \quad \left\|g\right\|_* = \max_{0\le n\le M}\left\|g^{\,n}\right\|$$

екенін аламыз

$$E^n \le E^0 + \frac{n\tau}{2\sqrt{\delta_0 \varepsilon_2}}\left\|\vec{f}\right\|_*^2 + \frac{Ra\Pr}{8\varepsilon_1(1-\varepsilon_3)\delta_0^2\varepsilon_3} n\tau \left\|g\right\|_*^2$$

$n\tau \le T$ тор құруын ескерсек, соңғы теңсіздік

$$0 \le E^n \le E^0 + M_1\left\|\vec{f}\right\|_{(*)}^2 + M_2\left\|g\right\|_{(*)}^2$$

түріне келеді, мұндағы M_1, M_2 - тұрақты, h және τ-дан тәуелсіз шама.

Әдебиеттер тізімі

1 Бейсебай П.Б. Численное исследование в задачах свободной конвекции // Вестник Казахского национального технического университета имени К.И. Сатпаева Серия «Физико-математичес-кие науки». - 2015. - №5 (111). - С. 510-517.

2 Beisebay P.B. On an implicit iterative splitting scheme for the problems of free thermal convection Life Sci. J., 11 (8s) (2014), pp. 344-349.

3 Beisebay P.B., Aruova B., Akzhigitov E., Tilepiev M.Sh.About one splitting scheme for the nonlinear problem of thermal convection Int. J. Heat Mass Transfer, 104 (2017), pp. 260-266.