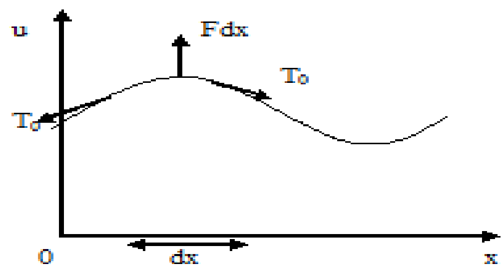
Қазақстан Республикасының Бірінші Президенті күніне арналған **«Сейфуллин оқулары – 9:** Жоғарғы білім және ғылым дамуындағы жаңа бағыт» атты Республикалық ғылыми-теориялық конференция материалдары = Материалы Республиканской научно- теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения – 9:** Новый вектор развития высшего образования и науки» посвященная дню Первого Президента Республики Казахстан. – 2013. – Т.2, ч.2 – Б. 26-28

ДАЛАМБЕР ӘДІСІ БОЙЫНША ІШЕК ТЕРБЕЛІСІ ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМІ

Қуанышева Ж., АукеноваА.

Ішек дегеніміз – жеңіл бүгілетін жіңішке тізбек. Ішек бастапқы T_o күйінде қатты тартылып тұр деп есептейік. Егер ішекті тепе-теңдік күйден шығарсақ және белгілі бір күшпен әрекет жасасақ, онда ішек тербеле бастайды.(1-сурет).



1-сурет

Тек кішігірім көлденең және жазық тербелістерді қарастырайық, яғни ішектің нүктелерінің тыныш күйінен ауытқуы аз, кез келген уақыт мезетінде ішектің барлық нүктелерінен бір жазық бойында және тыныш күйдегі ішек түзуіне бір перпендикуляр күйде ішектің әр нүктесі тербеледі.

Бұл түзуді O_x осі деп алып t уақыт мезетіндегі тепе-теңдік күйінен ішек нүктелерінің ауытқуын $u = u(x,t)$ деп белгілейміз. Әрбір t мәндері кезінде $u = u(x,t)$ функция графигі xOu жазықтығында t уақыт мезетіндегі ішек пішінін көрсетеді. $u = u(x,t)$ функциясы мына дифференциал теңдеуімен сәйкес келеді:

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{d^2U}{dx^2} + f \qquad (1)$$

Мұндағы $a^2 = T_0/\rho$, $f = F/\rho$, ρ – ішектің сызықтық тығыздығы, f – абсцисса осіне перпендикуляр және ұзындық бірлігімен сәйкес ішекке әсер ететін күш.

Егер сыртқы күш болмаса, яғни $f=0$, онда ***ішектің еркін тербелістерінің теңдеуі*** шығады:

$$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2\frac{d^2U}{dx^2} \qquad (2)$$

Ішектің қозғалысын толық анықтау үшін бастапқы мезетте форма мен жылдамдығы беріледі, яғни оның нүктелерінің орналасуы және x абсцисса түріндегі жылдамдығы. $U|_{t=0} = \varphi(x)$ $\frac{dU}{dx}|_{t=0} = \psi(x)$ болсын. Бұл шарттар есептің бастапқы шарттары.

$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2U}{dx^2}$ теңдеуін канондық түрге келтіріп,

$$\frac{d^2U}{d\varepsilon d\eta} = 0 \tag{3}$$

теңдеуін аламыз, мұндағы $\varepsilon = x - at, \eta = x + at$. Соңғы теңдеудің жалпы шешімі былай жазылады:

$$U = \theta_1(\varepsilon) + \theta_2(\eta) \tag{4}$$

мұндағы $\varepsilon = x - at$, $\eta = x + at$.

Θ_1, Θ_2 – функцияның туындылары.

Осылайша, теңдеудің еркін тербелістің дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі мынадай түрге келеді:

$$U = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \tag{5}$$

Θ_1, Θ_2 функцияларын таңдаймыз. Мұнда u=u(x,t) функциясы бастапқы келтірілген шарттарын қанағаттандыра алу керек, содан кейін бастапқы дифференциалдық теңдеудің шешіміне келеміз, яғни Даламбер әдісімен негізгі ішек теңдеуінің шешіміне келеміз:

$$U = \frac{\varphi(\mathrm{x - at}) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz \tag{6}$$

Бірнеше мысал келтірейік:

1-мысал

$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{d^2U}{dx^2}$ теңдеуі арқылы берілген ішектің $t = \pi$ мезетіндегі формасын анықтау керек бұл жерде егер $U|_{\mathrm{t=0}} = \sin x$ ал $\frac{dU}{dx}|_{\mathrm{t=0}} = \cos x$ болған кездегі формасы. Шешімін табу үшін

$\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = \cos x$ деп алып, $U = \frac{\varphi(\mathrm{x\text{-}at}) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz$ (6)

формуласына қоямыз.

Сол кезде мынандай теңдік шығады:

$$U = \frac{\sin(\mathrm{x} + a\mathrm{t}) + \sin(x - at)}{2} - \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos x dz = \sin x \cos at + \frac{1}{2}\cos xz|_{\mathrm{x\text{-}at}}^{\mathrm{x+at}}$$

$$U = \sin x \cos \pi a + \frac{1}{2a}\cos x(x + at - x + at)$$

$$U = \sin x \cos \pi a + t \cos x$$

t мен π орнына мәндерін қойсақ, $U = -\sin x - 0\cos x$ береді, яғни Даламбер әдісі арқылы табылған жауабы $U = -\sin x$ тең болып шығады.

Қорытындылай келе ішектің теңдеуін және оның формасының теңдеуін Даламбер әдісі арқылы шығару тиімді екенін байқаймыз.

Жетекшісі: аға оқытушы Л. Қ. Дюсембаева