Қазақстан Республикасының Бірінші Президенті күніне арналған **«Сейфуллин оқулары – 9:** жоғарғы білім және ғылым дамуындағы жаңа бағыт» атты Республикалық ғылыми-теориялық конференция материалдары = Материалы Республиканской научно- теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения – 9:** новый вектор развития высшего образования и науки**»** посвященная дню Первого Президента Республики Казахстан. – 2013. – Т.1, ч.1 – С. 200-202

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

***Тилепиев М.Ш., Уразмагамбетова Э.У., Ильясова Б.А.***

Рассматривается задача вытеснении одной жидкости другой в пористой среде. Такая задача представляет собой усложненный вариант задач Стефана. В задачах изотермической фильтрации (т.е. при постоянной температуре) чаще всего рассматривается две зоны и разделяются несмешивающиеся жидкости подвижным фронтом $R(t)$. Особый интерес вызывает тот случай, когда через уравнение массопереноса в насыщенных пористых средах и известный расход жидкости определяется неизвестная граница $R(t)$ (т.е. фронт вытесняющего агента). Такого рода задач рассматривались многими авторами. В частности, фильтрация тяжелой сжимаемой жидкости в вертикальной пористой галерее исследована Мейрмановым А.М. в работе [1], для линейных уравнений в автомодельной постановке подобная задача рассмотрена в [2], где решение получено в конечном виде; моделирование фазовых переходов при неизотермической фильтрации сжимаемой жидкости исследовано в [3].

Постановка задачи. Пусть в пористую среду через границу x=0 нагнетается вытесняющий агент. Тогда в пористой среде образуется две зоны фильтрации, разделенные подвижной границей $R(t): 0 < x < R(t)$ -первая зона фильтрации вытесняющего агента; $R(t) < x < x_0$ - вторая зона, в которой фильтруется вытесняемый агент. При этом первая зона характеризуется следующим образом: распределение давления P, а плотность

$$\rho = f(P) = 1, \quad \text{если} \quad P \geq P_n, \qquad \rho = f(P) = 1 + \delta(P - P_n), \quad \text{если} \quad P \leq P_n.$$

где $\delta = const > 0$, скорость фильтрации $\vec{v}$ подчиняется уравнению неразрывности и закону Дарси.

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \vec{v}) = 0 \tag{1}$$

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \tag{2}$$

где $m = const > 0$ – пористость грунта, $k = const > 0$ – коэффициент проницаемости грунта, $\mu = const > 0$ – вязкость фильтрирующейся жидкости.

На свободной границе $x = R(t)$

$$m\frac{\partial R}{\partial t} = \vec{v}, \qquad P = P_H = const > 0 \tag{3}$$

где $P_H$ – давление насыщения, при $x = 0$ задан расход массы

$$\rho \vec{v} = \varphi(t), \tag{4}$$

И начальное условие при $t=0$ $P(x,0)=P_0(x)$, $R(0)=R_0>0$ (5)

Без ограничения общности постоянные $m,\ k,\ \mu,\ P_H$ можно положить равными единице. Тогда в области $\Omega_T=\{(x,t)/0<x<R(t),0<t<T\}$ давление $P(x,t)<1$ и уравнения (1)-(5) легко получить относительно давления $P(x,t)$ следующее уравнение:

$$f'(P)\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(f(P)\frac{\partial P}{\partial x}\right) \qquad (x,t)\in\Omega_T \tag{6}$$

$$-\frac{dR}{dt}=\frac{\partial P}{\partial x}, \quad при \quad x=R(t), \quad t\in[0,T], \tag{7}$$

$$-f(P)\frac{\partial P}{\partial x}=\varphi(t) \quad при \quad x=0, \quad t\in[0,T], \tag{8}$$

а при $t=0$ выполняется условие (5).

Далее исползуя преобразование Г. Дюво $U(x,t)=\int_P^1 f(S)dS.$ (9)

Исходная задача (5)-(8) переформулируется в эквивалентную краевую задачу:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a(P)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{10}$$

$$U=0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{dR}{dt}, \quad при \quad x\in R(t), \quad t\in(0,T), \tag{11}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\varphi(t) \quad при \quad x=0, \quad t\in(0,T), \tag{12}$$

$$U(x,0)=U_0(x), \quad R(0)=R_0>0 \tag{13}$$

$$a(P)=\frac{f(p)}{\delta}, \quad U_0=\int_{P_0(x)}^1 f(S)dS, \qquad a(P)\ge a_0>0.$$

Умнажая (10) на $U_t$ и проинтегрируем по $x$ от $0$ до $R(t)$

$$0=\frac{1}{a(p)}\int_0^{R(t)}(U_t)^2dx-\int_0^{R(t)}U_tU_{xx}dx=\frac{1}{a(p)}\int_0^{R(t)}(U_t)^2dx-U_tU_x\Big|_0^{R(t)}+\int_0^{R(t)}U_{tx}U_xdx=$$

$$=\frac{1}{a(p)}\int_0^{R(t)}(U_t)^2dx-U_t(R(t),t)\cdot U_x(R(t),t)+U_t(0,t)\varphi(t)+\frac{1}{2}\int_0^{R(t)}(U_x)^2dx-\frac{1}{2}[U_x(R(t),t)]^2.$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{x=0}=\frac{dR}{dt}\varphi(t) \qquad \frac{\partial U}{\partial t}(R(t),t)=-\left(\frac{dR}{dt}\right)^2,$$

отсюда

$$0=\frac{1}{a(p)}\int_0^{R(t)}(U_t)^2dx+\left(\frac{dR}{dt}\right)^3+\frac{dR}{dt}\varphi(t)-\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^{R(t)}(U_x)^2dx. \tag{14}$$

Введем обозначения

$$y(t)=\int_0^{R(t)}(U_x)^2dx.$$

Тогда в силу не отрицательности первого интеграла, а также используя неравенство Юнга: $ab\le\frac{1}{m}\varepsilon^m a^m+\frac{m-1}{m}\varepsilon^{\frac{-m}{m-1}}b^{\frac{m}{m-1}}$, при $m=\frac{4}{3}$, $\varepsilon=1$, имеем

$$\left(U_x\left(R\ (t),t\ \right)\right)^2 = \int\limits_0^{R(t)}\left(U_x\right)_x^2 dx = \int\limits_0^{R(t)} U_x U_{xx} dx \le 2\left(\int\limits_0^{R(t)}\left(U_x\right)^2 dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{R(t)}\left(U_{xx}\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\left(U_x\left(R\ (t),t\ \right)\right)^3 \le \left(\int\limits_0^{R(t)}\left(U_x\right)^2 dx\right)^{3/4}\left(\int\limits_0^{R(t)}\left(U_{xx}\right)^2 dx\right)^{3/4}$$

$$0 \le \left(U_x\left(R\ (t),t\ \right)\right)^3 \le \frac{3}{4}\int\limits_0^{R(t)}\left(U_{xx}\right)^2 dx + \frac{1}{4}\left(\int\limits_0^{R(t)}\left(U_x\right)^2 dx\right)^3$$

Отсюда и из (14) получим следующее неравенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{R(t)}\left(U_x\right)^2 dx \le 2\left(\int\limits_0^{R(t)}\left(U_x\right)^2 dx\right)^3.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt} \ge 2\ y^3 \quad \text{или} \quad \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{y^2(t)}-\frac{1}{y^2(0)}\right) \ge 2\ t. \qquad \frac{1}{y^2(t)} \le \frac{1}{y^2(0)} - 4t.$$

Отсюда легко вычислить, что $y^2(t) \ge \frac{y^2(0)}{1-4y^2(0)t}$. $y(t) \ge \frac{y(0)}{\sqrt{1-4y^2(0)t}}$.

Окончательно сформулируем полученный результат.

Теорема. Пусть данные задачи (10)-(13) достаточно гладкими $\left(U_0(x)\in W_2^1(\Omega),\ \varphi\in L_2(0,T)\right)$. . Тогда при $t\to t_0$ решение задачи (10)-(13) неограниченно возрастает, т.е. $y(t)\to\infty$, где $y(t)=\int\limits_0^{R(t)}(U_x)^2\ dx$.