Қазақстан Республикасының Бірінші Президенті күніне арналған **«Сейфуллин оқулары – 9:** жоғарғы білім және ғылым дамуындағы жаңа бағыт» атты Республикалық ғылыми-теориялық конференция материалдары = Материалы Республиканской научно- теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения – 9:** новый вектор развития высшего образования и науки**»** посвященная дню Первого Президента Республики Казахстан. – 2013. – Т.1, ч.1 – С. 238-240

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Акжигитов Е.А.

В прямоугольнике $\Omega = \{(x, y): 0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < 1\}$ рассматривается задача Дирихле:

$$Lu + \lambda u = -K(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + \lambda u = f(x, y) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} u(0, y) = u(2\pi, y) \\ u_x(0, y) = u_x(2\pi, y) \end{cases} \qquad (2)$$

$$u(x,0) = u(x,1) = 0 \qquad (3)$$

Определим класс G как множество, состоящее из всех $u(y)$-кусочно-непрерывных, неотрицательных функций на отрезке [0,1], такое,что

$$u(y)=0 \text{ и } \int_{\alpha}^{\beta} u(y)dy \neq 0, \ (\alpha, \beta) \subset [0,1]. \qquad (*)$$

Через G_{δ_0} обозначим множество, состоящее из всех$K(y),a(y) \in G$, для которых

$$\inf_{x \in (0,|n|+1)} \psi_n^*(x) \geq \delta_0 > 0, \text{ где}$$

$$\psi_n^*(x) = \left\{ \frac{1}{d^2} : \frac{1}{d} \geq \int_{x-\frac{d}{2}}^{x+\frac{d}{2}} \psi_n(t)\,dt, \qquad \left(x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2} \right) \subset (0, |n| + 1) \right\} \qquad (**)$$

$$\text{а} \quad \psi_n(t) = \frac{|n|^2}{(|n|+1)^2} K\left(\frac{t}{|n|+1}\right) + \frac{|n|}{(|n|+1)^2} a\left(\frac{t}{(|n|+1)}\right) + \frac{\lambda}{(|n|+1)^2}$$

Непосредственно из определения $\psi_n^*(x)$ для всех$K(y),a(y) \in G$следует, что $\psi_n^*(x) > 0$, $\quad x \in (0,|n|+1)$. Поэтому при $\delta \geq 0$, $G_{\delta_0} = G$.

Приведем необходимые обозначения и определения.

Известно, что если

$$u \in L_2(\Omega), \quad \text{то} \quad u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(y) e^{inx}.$$

где $u_n(y)$-коэффициенты Фурье в смысле L_2 .

Определение 1. Дробной производной функции $u(x,y)$ порядка $\alpha \geq 0$ по x называется функция /1/:

$$D_x^\alpha u = e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha u_n(y) e^{inx} + e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} \sum_{n=-\infty}^{-1} |n|^\alpha u_n(y) e^{inx}$$

Через $L_{2,K,a}^{2,2}(\Omega)$ - обозначим пространство функций, полученное пополнением множества функций $C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условиям (2), (3) относительно нормы:

$$\left\| u, L_{2,K,a}^{2,2} \right\| = \left(\int_\Omega \left(\left| K(y) u_{xx} \right|^2 + \left| u_{yy} \right|^2 + \left| a(y) u_x \right|^2 + |u|^2 \right) dxdy \right)^{1/2}$$

Определение 2. Если для функции $u \in L_2(\Omega)$ существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций, из класса $W_2^2(\Omega)$ удовлетворяющих условиям (2), (3) такая, что $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{(L+\lambda E)u_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся по норме $L_2(\Omega)$ к u и f соответственно, то u называют сильным решением задачи (1)-(3).

Основными результатами являются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $K(y)$ и $a(y)$ -кусочно-непрерывные, неотрицательные функции на отрезке [0,1].Тогда при $\lambda > 0$ для всякого $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи (1-3).

Теорема 2. Пусть $K(y), a(y) \in G_{\delta_0}$. Тогда при $\lambda > 0$

а) оператор $K(y) D_x^2 (L+\lambda E)^{-1}$ ограничен в $L_2(\Omega)$,

б) оператор $a(y) D_x (L+\lambda E)^{-1}$ вполне непрерывен.

Теорема 3. Пусть $K(y), a(y) \in G_{\delta_0}$. Тогда при $\lambda > 0$ для всякого $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи (1-3) такое, что $u \in L_{2,K,a}^{2,2}(\Omega)$.

Теорема 4. Пусть $\rho(y) \in G$, а функции $K(y)$, $a(y) \in G_{\delta_0}$.Тогда оператор $\rho(y) D_x^\alpha (L+\lambda E)^{-1}$ вполне непрерывен в $L_2(\Omega)$, если выполнены одно из следующих случаев :

а) $\rho(y) \sim K(y)$ и $0 \le \alpha < 2$.

б) $\rho(y) \sim a(y)$ и $0 \le \alpha < 1$.