Қазақстан Республикасының Бірінші Президенті күніне арналған **«Сейфуллин оқулары – 9:** жоғарғы білім және ғылым дамуындағы жаңа бағыт» атты Республикалық ғылыми-теориялық конференция материалдары = Материалы Республиканской научно- теоретической конференции **«Сейфуллинские чтения – 9:** новый вектор развития высшего образования и науки**»** посвященная дню Первого Президента Республики Казахстан. – 2013. – Т.2, ч.1. – С. 217-219

ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ (ЗАДАЧА БРОХИСТОХРОНА)

Жунус Темирлан

Постановка задачи: В вертикальной плоскости заданы 2 точки на различных уровнях. Требуется соединить их некоторой гладкой линией (без изломов), скатываясь по которой, тяжёлый материальный шарик под воздействием лишь силы тяжести (трение не учитывается) пройдёт путь из верхней точки в нижнюю за кратчайшее время.

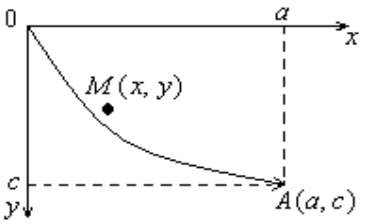
Воспользуемся законом сохранения энергии в любой точке кривой сумма потенциальной и кинетической энергии шарика постоянна. Будем считать, что в точке 0 сумма равна 0, получаем

$$0 = W_n + W_k = -mgy + \frac{mv^2}{2},$$

где m – масса шарика; g – ускорение свободного падения; V – его скорость.

$V = \sqrt{2gy}$

.



С другой стороны: $V = \frac{ds}{dt}, dt = \frac{ds}{V}$;

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$ds^2 = \sqrt{1 + y_x^2}dx,\ y_x = \frac{dy}{dx}$$

Тогда

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y_x^2}}{\sqrt{2gy}}dx = \sqrt{\frac{1 + y_x^2}{2gy}}dx$$

.

Проинтегрируем обе части этого равенства:

$$T(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y_x^2}{2gy}}dx$$

– время скатывания по кривой $y = y(x)$. Введём множество функций: $Y(x) = \{y(x) C^{(1)}_{[0,a]} : Y(0) = 0, Y(a) = c\}$

Эта задача была одной из первых задач, которая была поставлена и решена с помощью метода вариаций. Отсюда и название вариационное исчисление.

Постановка основной задачи вариационного исчисления. Слабая минималь

Основной задачей вариационного исчисления является обобщение задачи о брахистохроне.

Определение. Функция $y = y(x),\ x \in [a,b]$ непрерывная вместе со своей первой производной и удовлетворяющая условию $y(a) = c,\ y(b) = d$ называется *допустимой кривой.*

Обозначим через $Y = \{y \in C^{(1)}_{[a,b]} : y(a) = c, y(b) = d\}$ – множество всех допустимых кривых (рис. 1). Каждой допустимой кривой $y \in Y$ поставим в соответствие

функционал $I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y_x(x))\,dx$, где функция $F(x,y,z) \in C^{(2)}$. Основная задача вариационного исчисления имеет вид

$$I(y) \to \min, \quad y \in Y \qquad \textbf{(1)}$$

Допустимая кривая $y^0 \in Y$ называется *минималью*, если $I(y^0) \le I(y), \ \forall y \in Y$.

Минималь – это аналог оптимального плана.

Слабая минималь – это аналог локального оптимального плана.

Решение задачи о брахистохроне

Применяя к решению задачи из пункта 1 полученные условия оптимальности, получим:

$$F(x, y, y_x) = \sqrt{\frac{1+y_x^2}{gy}}$$

Вычисляем для этой функции: $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y_x}$ и компоненты, входящие в полную производную по x: $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_x}$. Составляем для задачи развёрнутое уравнение Эйлера. Если привести все слагаемые к общему знаменателю, то в результате для уравнения Эйлера получим: $\frac{2yy_{xx} + y_x^2 + 1}{(2gy(1+y_x^2))^{\frac{3}{2}}} = 0$. Поскольку знаменатель в нуль не обращается, то уравнение Эйлера запишем в виде: $2yy_{xx} + y_x^2 + 1 = 0$ **(2)**–это дифференциальное уравнение 2-го порядка явно не зависящее от *x*. Применением следствия из канонической системы нетрудно убедиться, что:

$$y(1+y_x^2) = \text{const} \qquad \textbf{(3)}$$

– первый интеграл для (2).

Имеем:

$$\frac{d}{dx}(y(1+y_x^2))_{(2)} = y_x(1+y_x^2) + y2y_xy_{xx} = y_x(1+y_x^2+2yy_{xx})_{(2)} = 0.$$

Из первого интеграла (3) (это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными) не трудно найти общее решение в параметрической форме:

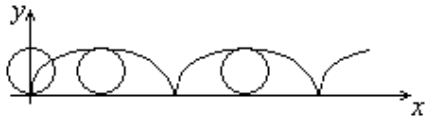
$$\begin{cases} x(t) = c_1 + \frac{c}{2}(t - \sin t) \\ y(t) = \frac{c}{2}(1 - \cos t). \end{cases}$$

(4) где c_1, c определяются из условий: $y(0) = 0, \ y(a) = c$.

В частности получим, что c_1=0 и найдём *c*. Получим единственную экстремаль задачи. Можно доказать, что задача о брахистохроне имеет решение и поэтому наша экстремаль и будет минималью – решением задачи о брахистохроне.

Известно, что кривая (3) называется *циклоидой*.

Таким образом, приходим к выводу, что брахистохроной является некоторая дуга *циклоиды*:



Научный руководитель: старший преподаватель Дюсембаева Л.К.