Қазақстан Республикасы Тәуелсіздігінің 30 жылдығына арналған «Сейфуллин оқулары – 17: «Қазіргі аграрлық ғылым: цифрлық трансформация» атты халықаралық ғылыми – тәжірибелік конференцияға материалдар = Материалы международной научно – теоретической конференции «Сейфуллинские чтения – 17: «Современная аграрная наука: цифровая трансформация», посвященной 30 – летию Независимости Республики Казахстан.- 2021.- Т.1, Ч.3 - С.17 -21

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ В КАНАЛАХ С ПАМЯТЬЮ

А.А. Ержанбаева, А.С.Толегенова ,Б.Е.Хамзина , Л.А.Соболева

В данной статье рассматривается формирование оценки импульсной характеристики канала методом наименьших квадратов. Выводится новое измерение оценки вычисления. Моделируется работа данного алгоритма в среде Matlab, для модели канала с аддитивным гауссовским шумом и постоянными параметрами. В результате получается зависимость нормированной среднеквадратической ошибки оценки импульсной характеристики при различных значениях отношения сигнал/шум, которая позволяет сделать вывод о нецелесообразности данного метода при малых значеният отношения сигнал/шум.

Ключевые слова: технология ортогонального частотного мультиплексирования, алгоритм "прием в "целом" с поэлементным принятием решения", метод регуляризации, метод наименьших квадратов.

Под воздействием увеличивающихся требований к доступности услуг связи беспроводная связь превращается в один из крупных и быстроразвивающихся секторов телекоммуникаций. При постоянном росте числа абонентов современные системы беспроводной связи должны обеспечивать приемлемый уровень достоверности приема информации в условиях помех и интерференции сигналов. При этом должно обеспечиваться высокое качество связи при высокой скорости передачи информации и высоких скоростях движения абонентов в городской застройке.

Применение технологии ортогонального частотного мультиплексирования не в должной степени позволяет решить это. Поэтому нами рассмотрено формирование OFDM-сигнала с использованием квадратурной амплитудной модуляции (КАМ) методом наименьших квадратов для выявления условий эффективности данного метода.

Технология OFDM основана на формировании многочастотного сигнала, состоящего из множества поднесущих частот, отличающаяся на величину $\Delta f = \frac{|\omega_n - \omega_{n-1}|}{2\pi}$, выбранную из условия ортогональноости сигналов на соседних поднесущих частотах, где ω_n- n-я поднесущая частота.

При использовании КАМ для формирования сигнала OFDM поток последовательных информационных символов разбивается на блоки, содержащие N символов, каждый из которых формирует комплексное число, характеризующее сигнал КАМ созвездия. На следующем этапе модуляции каждая поднесущая OFDM-сигнала модулируется соответствующим сигналом КАМ созвездия.

Рассмотрим формирование OFDM-сигнала с использованием КАМ-16. Пусть на входе КАМ-модулятора наблюдается последовательность кодовых символов b_i. Каждые четыре кодовых символа преобразуется в $d_i^{\&}$ – комплексное число, характеризующее одну из 16 сигнальных точек, где $|(d_{\downarrow}i|)$- амплитуда и arg($d_i^{\&}$)-фаза i-го поднесущего колебания. Таким образом, если число ортогональных поднесущих равно N, то значения отсчетов комплексной огибающей OFDM-символа длительности T запишутся в виде [1]

$$u_k^{\&} = \sum_{i=0}^{N-1} d_i^{\&} \, exp \, \langle j \frac{2\pi}{T} (t_l - t_k) \rangle \quad (1)$$

где $l, I \ = \ 0,1,2, \dots, N - \ 1; t \ \ = \ t \ \ + \ l\Delta t, \Delta t \ = \frac{1}{N-1}$; N – число ортогональных поднесущих.

Данная последовательность отсчетов получается с помощью операции обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ). Совокупность отсчетов $u_k^{\&}(t_l)$ последовательно во времени передается по каналу связи. При отсутствии временного рассеяния в месте приема для решения задачи оценки символа d_i достаточно было бы совершить прямое ДПФ совокупности отсчетов $u_k^{\&}(t_l)$. Каналы с межсимвольной интерференцией характеризуются памятью канала M – длительностью импульсной реакции канала, выраженной числом тактовых интервалов. При наличии явно выраженного временного рассеяния τ и памяти канала $M \ = \tau/\Delta t$ можно утверждать, что на любой отсчет на приеме будет оказывать воздействие каждый из ($M - 1$) предшествующих отсчетов.

При использовании алгоритма «прием «в целом» с поэлементным принятием решения» (ПЦППР) необходима информация о состоянии канала в данный момент времени на приемной стороне. Основной принцип получения оценок состояния канала заключается в использовании пилотных символов, которые мультиплексируются в общий поток данных, при этом значение пилотных символов известно на приемной стороне, где производится оценивание параметров канала по наблюдаемой выборке, характеризующей пилот-символы. Пилотные символы могут быть по-разному расположены в системе OFDM. При блоковой структуре расположения пилот-символы на всех поднесущих передаются периодически [3].

На рисунке 1 приведена блоковая структура расположения пилот-символов, где пилот-символы (закрашенные места) периодически передаются по каналу связи на приемник через каждое Δt время.

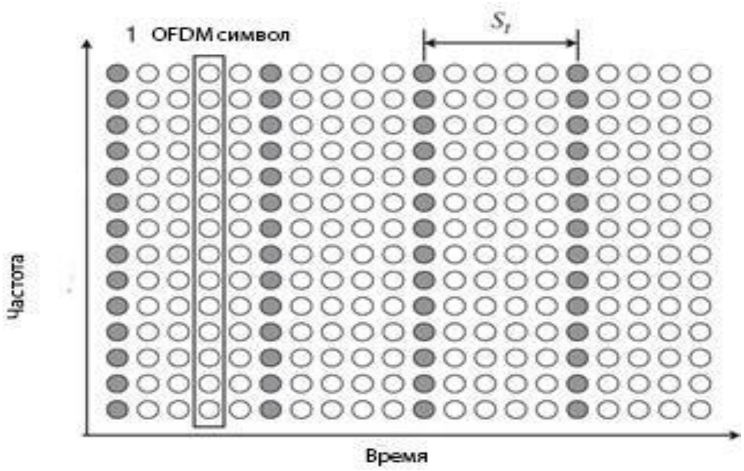

Рис. 1. Блоковая структура расположения пилот-символов

Обозначая отсчеты импульсной характеристики вектором $h_0, h_1, \dots, h_{M-1}$, на приемной стороне вектор отсчетов принимаемых символов можно записать в виде

$$Z^k = U^k \cdot H^k + W^k \tag{2}$$

где $U^k = \begin{bmatrix} u_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N-1} & \cdots & u_0 \end{bmatrix}$ – матрица передаваемых OFDM символов; $H^k = [h_0, h_1, \dots, h_{M-1}]^T$ – вектор отсчетов импульсной характеристики; $W^k = [w_0, w_1, \dots, w_{N+M-1}]^T$ – вектор отсчетов случайного БГШ, k - номер итерации в алгоритме оценивания.

Значения U^k получаются путем использования принятых известных пилот-символов. Обозначим $\widehat{H^k}$ – оценкой характеристики канала H^k.

Для формирования оценок параметров канала по пилотным символам используется метод наименьших квадратов. Наша задача состояла в том, чтобы выбрать такое значение оценки вектора $\widehat{H^k}$, при котором значение квадратичной формы (3) оказывается минимальным: [2]

$$J(\widehat{H^k}) = \frac{1}{2}(Z^k - U^k H^k)^T \cdot R^{-1}(Z^k - U^k H^k), \tag{3}$$

где R^{-1} – матрица весов (штрафов) размерностью $M \times M$.

Оптимальная оценка, которая минимизирует формулу (3), будет оценкой наименьших квадратов. Имеется конкретная выборка некоторого объема, на основе которой должно быть указано значение оценки для вектора H^k, при котором значение формы $J(\widehat{H^k})$ оказывается минимально возможным. Следовательно, оценка наименьших квадратов является корнем уравнения:

$$\frac{\partial J(\widehat{H^k})}{\partial \widehat{H^k}} \Bigg/_{\widehat{H^k} = \widehat{H^k_{LS}}} = 0$$

Подставив в (3), получаем

$$\widehat{H^k} = ((U^k)^T \cdot R^{-1} \cdot U^k)^{-1} \cdot (U^k)^T \cdot R^{-1} \cdot Z^k \tag{4}$$

Введем обозначения

$$\dot{P}^k = ((U^k)^T \cdot R^{-1} \cdot U^k)^{-1} \tag{5}$$

Подставив (5) в (4), формулу для оценки наименьших квадратов:

$$\widehat{H^k} = P^k \cdot (U^k)^T \cdot R^{-1} \cdot Z^k \tag{6}$$

Предположим, что на каком-то интервале времени, когда были переданы следующие пилот-символы произведено новое очередное измерение вектора Z:

$$Z^{k+1} = U^{k+1} \cdot H^{k+1} + W^{k+1} \tag{7}$$

Путем матричных преобразований получаем алгоритм вычислений оценки методом наименьших квадратов:

$$\widehat{H^{k+1}} = \widehat{H^k} + P^{k+1} \cdot (U^{k+1})^T \cdot R^{-1} \cdot Z^{k+1} - U^{k+1} \cdot \widehat{H^k} \tag{8}$$

Таким образом, новое измерение оценки вычисляется с использованием старой оценки на предыдущем k шаге.

Нами было проведено моделирование работы данного алгоритма в среде Matlab. Моделирование проводилось для модели канала с аддитивным гауссовским шумом и постоянными параметрами: памятью M = 4 и набором отсчетов импульсной реакции:

$h_0^{\&} = 1.5 + 1.5i;$

$h_1^{\&} = -0.5 + 1.5i;$

$h_2^{\&} = 3 + 1.5i;$

$h_3^{\&} = 11 + 1.5i;$

Оценка импульсной характеристики рассчитывается по формуле (4) при известных значениях $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$ рассчитанных по пилотным символам, имеющимся в структуре передаваемого сигнала.

На рисунке 2 приведена зависимость нормированной среднеквадратической ошибки оценки импульсной характеристики при различных значениях отношения сигнал/шум. Данная зависимость получено в ходе моделирования в Matlab.

Нормированная среднеквадратическая ошибка ε рассчитывается по формуле $\varepsilon = \widehat{N}\widehat{E}\widehat{I}/E$ где, среднеквадратическая ошибка СКО и параметр E рассчитываются по формулам:

$$СКО = (h_0 - \widehat{h_0})^2 + (h_1 - \widehat{h_1})^2 + K + (h_{M-1} - \widehat{h_{M-1}})^2 \qquad (9)$$

$$E = (h_0)^2 + (h_1)^2 + \cdots + (h_{M-1})^2 \qquad (10)$$

Отношение мощностей сигнала и шума рассчитывается по формуле

$$\frac{P_c}{P_{\widehat{1o}}} = \frac{E}{\sigma}$$

где при моделировании параметр ошибки σ задается от 1 до 15. При отношении сигнал/шум значение ε составляет составляет $1{,}95 \cdot 10^2$, а при отношении ε составляет 0,869.

При малых отношениях сигнал/шум следует искать методы , обладающие существенно меньшей нормированной среднеквадратической ошибкой ε, например метод регуляризации.

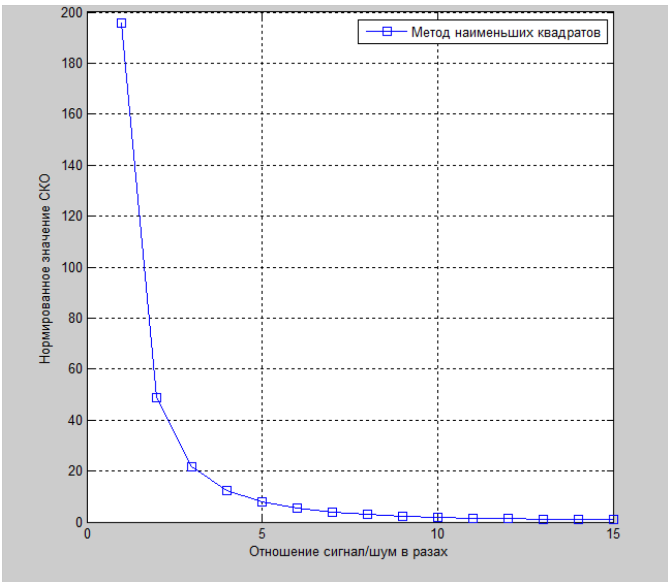

Рис. 2. Зависимость нормированной СКО от отношения сигнал/шум

Регуляризованные оценки могут быть получены по формуле

$$\widehat{H^k} = ((U^k)^T \cdot U^k + \alpha I)^{-1} \cdot (U^k)^T \cdot Z^k \qquad (11)$$

где α – параметр регуляризации; I – единичная матрица.

Таким образом, исследование метода наименьших квадратов для оценки импульсной характеристики схемы приема сигналов OFDM в каналах с памятью позволило нам сделать следующий вывод, что при малых отношениях сигнал/шум использование данного метода не целесообразно, так как высокое нормированное значение СКО увеличивает вероятность получения некорректной информации.

Список литературы

1. Волков Л.Н., Немировский М.С., Шинаков Ю.С. Системы цифровой радиосвязи. М.: Эко-Трендз, 2010. - 392 с.
2. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. - М.: Связь, 2015. - 496 с.
3. Hadj Ali, T., Hamza, A.. Low-complexity PAPR reduction method based on the TLBO algorithm for an OFDM signal. Режим доступа: https://link.springer.com/article/ 10.1007/ s12243-020-00777-0. Дата обращения: 15.10.2020.