«Сейфуллин оқулары-18(2): «XXI ғасыр ғылымы – трансформация дәуірі» Халықаралық ғылыми-практикалық конференция материалдары = Материалы международной научно-практической конференции «Сейфуллинские чтения – 18(2): «Наука XXI века - эпоха трансформации» - 2022.- Т.I, Ч.III. - Б.171-175.

БІР АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯ ҮШІН МИНИМИЗАЦИЯ ӘДІСТЕРІН ҚОЛДАНУ

А.Ж.Асқарова, ф-м.ғ.к., доцент
М.А.Серімбетов, т.ғ.к., аға оқытушы
Г.Р.Елеусізова, аға оқытушы
Е.А.Грипп, аға оқытушы

С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық ниверситеті, Нұр – Сұлтан қ.

[a;b] кесіндісінде $f(x)$ функциясын минимизациялау мәселесін шешу үшін тәжірибелік есептерде жуықтау әдістері қолданылады. Бұл әдістер $f(x)$ функциясының ақырлы мәндерін және [a;b] кесіндісінің кейбір нүктелерінде функцияның туындыларын анықтауда, есептің шешімін қажетті дәлдікпен табуға мүмкіндік береді. Функцияның мәндерін ғана қолданатын және оның туындыларын есептеуді қажет етпейтін әдістер тікелей минимизация әдістері деп аталады[1], [2], [10].

Тікелей минимизация әдістерінің артықшылығы функцияның дифференциалдануын қажет етпейді, сонымен қатар функция аналитикалық түрде берілмеуі де мүмкін. Тікелей минимизация әдістерінің алгоритмі $f(x)$ функциясының берілген нүктелерде функцияның мәнін анықтауға негізделген.

$f(x)$ функциясы унимодалды болған жағдайда ғана осы әдістерді қолдануға болады. Сондықтан $f(x)$ функциясын [a;b] кесіндісінде унимодалды функция деп санаймыз. Унимодалды функцияның минимум нүктелерін минимизация әдістерін қолдану арқылы табуды қарастырайық[11].

Сұрыптау әдісі (бірқалыпты іздеу) [1], [2], [3]. Сұрыптау әдісі, немесе бірқалыпты іздеу, минимизацияның тікелей әдістерінің ең қарапайымы болып саналады.

[a;b] кесіндісі n тең бөліктерге бөлінеді:

$$x_i = a + \frac{i\,(b-a)}{n}, \quad i = 0, \dots, n$$

x_i нүктелерінде $f(x)$ функцияның мәндерін есептейміз, шыққан мәндерді салыстыру арқылы x_m, $0 \le m \le n$ нүктесін анықтаймыз:

$$f(x_m)=\min_{0\le i\le n} f(x_i) \qquad (*)$$

Содан кейін, $x^{¿}=x_m$, $f^{¿}=f(x_m)$.

Сұрыптау әдісімен есептегенде, келесі жағдайларға назар аудару керек:

$f(x)$ функциясының $x^{¿}$ минимум нүктелеріндегі қателігі $\varepsilon=\frac{b-a}{n}$ мәнінен аспау керек.

(*) қатынастан, функцияның унимодалдық жағдайына байланысты мынадай ережелер орындалуы керек:

а) $f(x_{m-1})\ge f(x_m)$, яғни $x^{¿}\in x_{m-1};b$;

ә) $f(x_m)\le f(x_{m+1})$, яғни $x^{¿}\in a;x_{m+1}$.

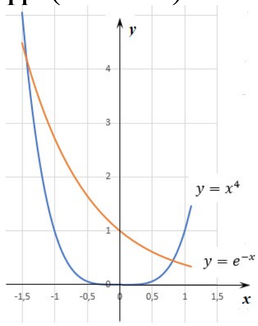
Бұдан, $x^{¿}\in x_{m+1}$; $b\cap x^{¿}\in a$; $x_{m+1}=x_{m-1};x_{m+1}$ аламыз. Соңғы кесіндінің ұзындығы $\frac{2(b-a)}{n}$ мынаған тең, ал x_m нүктесі кесіндінің ортасы болады.

Сол себепті, $|x_m-x^{¿}|\le\frac{b-a}{n}=\varepsilon_n$.

Сонымен, $x^{¿}$ нүктесінің ε нақты дәлдігін алу үшін, кесіндінің n бөліктерінің санын $\varepsilon_n=\frac{b-a}{n}\le\varepsilon$, яғни $n\ge\frac{b-a}{\varepsilon}$ шартынан таңдау қажет.

Мысал. $f(x)=x^4+e^{-x}\rightarrow\min$ теңдеуінің $\varepsilon=0{,}1$ дәлдікпен $x\in[0;1]$ аралығында минимум мәнін анықтау керек.

Теңдеуді мына түрде жазып, функциялардың графигін саламыз: $x^4=e^{-x}$, $f(x)=x^4$ және $f(x)=e^{-x}$. Бұл теңдеудің түбірі $x\in[0;1]$ аралығында жатқаны сызбадан да көрініп тұр (сызба1).



Сызба 1

$[0;1]$ кесіндісінде функция унимодалды екенін тексеру керек. n бөліктер санын анықтайық: $n\ge\frac{b-a}{\varepsilon}=\frac{1-0}{0{,}1}=10$, яғни $n=10$ аламыз. $f(x)$ функциясының мәнін есептейміз, мұндағы $x_i=0{,}1\cdot i,\ i=0,1,\ldots,10$ және кесте толтырамыз:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x_i)$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,7	<u>0,6</u>	0,6	0,7	0,8	1,0	1,3

	0	0	2	5	0	7	8	4	6	6	7

Сонымен, $x^{¿}=0,5$; $f(x^{¿})=0,67$.

Сұрыптау әдісінде, $f(x)$ функциясының мәнін анықтау үшін, χ_i мәні алдын-ала таңдап алынады. Минимум нүктесі жатқан кесіндіні біртіндеп қысқарта отырып, сипатталған жағдайды қаншама рет қайталауға болады. Соңғы алынған кесіндінің ұзындығы жеткілікті кіші болған кезде, $x^{¿}=\bar{x}$ аламыз, мұндағы $\bar{x}$ - сол кесіндінің бір нүктесі, мысалы оның ортасы [3], [10].

Дихотомия әдісі (кесіндіні ортасынан бөлу). [a;b] аралығының ортасынан $\delta>\varepsilon$ қашықтықта орналасқан x_1, x_2 нүктелері таңдап алынады:

$$x_1=\frac{a_i+b_i}{2}-\delta \; ; \qquad x_2=\frac{a_i+b_i}{2}+\delta \; .$$

Бір итерациядан кейін анықталмаған аралық шамамен екі есе азаяды.

n итерациядан кейін аралық ұзындығы шамамен мынаған тең болады:

$$\frac{b_0-a_0}{2^n} \; .$$

ε нақты дәлдігін алу үшін,

$$n\geq\frac{\ln(b_0-a_0)/\varepsilon}{\ln 2}$$

итерация жасалу керек. Әр итерацияда минимизацияланатын функция екі рет есептелінеді.Нәтижесінде итерациялардың қайталануымен біз экстремум нүктесін анықтаймыз, бірақ та бұл процесс созылмалы болуы мүмкін, сол себепті, экстремум нүктесін анықтау үшін, есептеу қателігі де берілген жөн [1], [2], [10].

Мысал. $f(x)=x^4+e^{-x}$ теңдеуінің $\varepsilon=0,1$ дәлдікпен $x\in[0;1]$ аралығында дихотомия әдісімен минимум мәнін анықтау керек.

$\delta=0,02$ деп аламыз.

1-ші итерация: $x_1=\frac{0+1}{2}-0,02=0,48$, $x_2=\frac{0+1}{2}+0,02=0,52$;

$f(x_1)=0,672$; $f(x_2)=0,669$. $f(x_1)>f(x_2)$, сол себепті $a=x_1=0,48$, $[x_1;b]$ кесіндісін қарастырамыз. Нақтылықты тексерейік: $\varepsilon_n=\frac{1-0,48}{2}=0,26>0,1$, яғни келесі итерацияға көшеміз. Қалған итерациялардың есептеулерін кесте түрінде жазамыз:

итерация	a	b	(b-a)/2	x1	x2	f(x1)	f(x2)	f(x1) және f(x2) салыстыру
2	0,48	1	0,26	0,72	0,76	0,755491	0,801288	f(x1)<f(x2)
3	0,48	0,76	0,14	0,6	0,64	0,678412	0,695065	
4	0,48	0,6	0,06	0,06<0,1 нақтылықты алдық				

Сонымен, $x^{¿}=0,54$; $f(x^{¿})=0,67$

Егер $f(x)$ функциясын есептеуде немесе туындыларын табуда қандай да бір қиындықтар болмаса, онда бір айнымалы функцияның минимизациясын анықтауда, туындыларды қолдануға негізделген әдістерді қолдануға болады. Көптеген жағдайларда, тікелей минимизация әдістеріне қарағанда, бұл әдіс арқылы есептің шешімінің жинақтылығын тезірек анықтауға болады.

Ньютон әдісі. $f(x)$ функциясының бірінші және екінші туындыларын табу арқылы, кейбір белгілі бір жағдайларда, жоғары да қарастырылған әдістерге қарағанда Ньютон әдісі минимум нүктесін анықтау жинақтылығын аз уақытта орындайды. $f(x)$ функциясы екі рет дифференциалданатын дөңес функция болса, онда бастапқы жуықтауды x_0 нүктесі деп алып, тізбек құраймыз:

$$x_{k_{+1}} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

$|f'(x_k)| \le \varepsilon$ теңсіздігін есептеудің нақты мәнін анықтаудың шарты деп есептей отыра, $x^{¿} = x_k,\ f^{¿} = f(x_n)$ деп аламыз. x_0 нүктесі дұрыс таңдалмаса, онда тізбек жинақсыз болады. Егер де x_0 нүктесі $x^{¿}$ нүктесіне өте жақын болса, онда тізбек $x^{¿}$ нүктесіндегі жинақтылығы тез анықталады.

Ньютон әдісінің негізгі мағынасы: $[a;b]$ кесіндісінде $f(x_0)$ және $f''(x_0)$ функцияларының нүктесінде таңбалары бірдей болатын x_0 нүктесі таңдап алынады, яғни $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ шарты орындалады. Бастапқы жуықтауда x_0 нүктесі деп, кесіндінің қандай да бір соңғы нүктесін таңдаған ыңғайлы [4].

Тәжірибелік есептерді шешуде $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \Rightarrow x^{¿} \approx x_{k+1}$ шарты орындалғанша, итерациялық процесс жүреді [5].

Ньютон әдісімен де есептің минимизациясын анықтағанда, үш итерациядан кейін керек нәтижені аламыз.

Есептеу нәтижесі: Сұрыптау әдісімен функцияның минимималды нүктесін анықтау қарапайым әдіс, бірақ та біраз есептерді ол әдіспен есептеу біршама қиындық туғызады.

Дихотомия әдісі кесіндіні жүйелі түрде ортасынан бөледі және әр итерация сайын кесіндінің бір бөлігін түсіріп тастайды. Кесіндінің ұзындығы үлкен және есептеу дәлдігі өте кіші болса, онда бұл әдістің итерациясы көп болады. Дихотомия әдісі әмбебап, кез келген үздіксіз функциялар үшін жинақты. Бірақ та басқа сандық әдістерге қарағанда жинақтылық жылдамдығы өте төмен. Бұл әдістің кемшілігі - оны қолдануды бастамас бұрын, функцияның мәндері әртүрлі болатын екі нүктені табу керек және еселі, комплексті түбірлері және теңдеулер жүйелерін шешуде бұл әдіс қолданылмайды.

Ньютон әдісі – басқа әдістерге қарағанда өте тиімді әдіс, жинақтылығы квадраттық және жинақтылық реті 2-ге тең. Сонымен, Ньютон әдісінің жинақтылық жылдамдығы өте тез, ешқандай өзгеріссіз әдіс комплексті жағдайда да қолданылады. Ньютон әдісінің кемшілігі - әр итерацияда туындыларды есептеу, оған уақыт көп кетеді [8].

Қорытынды: Аналитикалық түрде есептерді үш әдіспен шешуде, түбірлерінің мәні бірдей болды және функцияның мәндері берілген дәлдікпен тура шықты. Функция тиісті критерийлер арқылы унимодалдылық пен дөңес болу үшін зерттелді, сондықтан минимизация әдістерін қолдана отырып, функцияны экстремумға зерттеуге болады. Дихотомия және Ньютон әдістерін талдау арқылы, Ньютон әдісі жинақтылығы дихотомия әдісіне қарағанда тезірек екенін байқадық, бірақ та алынған нәтижелер, берілген функция үшін, жинақтылық жылдамдықтары да бірдей болып шықты.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1 Ділман Т. Б. Сандық әдістер [Текст]: оқулық / Т. Б. Ділман, А. Т. Ділманова. – Қызылорда, 2015. – 354 б.

2 Бектемесов М.Ә. Сандық әдістер [Текст]: оқу құралы / М.Ә. Бектемесов, Ф.Р. Гусманова, А.Р. Тұрғанбаева. – Алматы Қазақ Университеті, 2017. - 252 б.

3 Омарбекова Ә. С. Сандық әдістер [Текст]: оқу құралы / Ә. С. Омарбекова, С. Т. Дүзелбаев. - Алматы : Эверо, 2014. – 216 б.

4 Зенков А.В. Численные методы [Текст]: оқу құралы/ А.В.Зенков. - Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2016. – 123 с.

5 Герчес Н.И. Вычислительные методы. [Текст] Ч.1: учебное пособие для студентов технических направлений / Н.И.Герчес. – Тюмень: ТюменьГНГУ, 2015. – 95 с.

6 Численные методы. Примеры и задачи [Текст]: учебное пособие по курсам «Информатика» и «Вычислительная математика» / Ф.Г. Ахмадиев, Ф.Г. Габбасов, Л.Б. Ермолаева, И.В. Маланичев. – Казань, 2017. – 87 с.

7 Рубцова С.В. Основы теории погрешностей [Текст]: учебно-методическое пособие / С.В. Рубцова, О.И. Охрименко, О.А. Алейникова. – Шахты: ИСОиП (филиал) ДГТУ, 2019. – 56 с.

8 Киреев В. И. Численные методы в примерах и задачах [Текст] : учебник/ В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – Издательство "Лань", 4-е издание, 2021.- 448 с.

9 Extending the local convergence analysis of Newton's method/Argyros I.K., Shrestha N. Communications on Applied Nonlinear Analysis. -№ 24(2). -С. 49-60. 2017

10 Аббасов М.Э. Методы оптимизации [Текст]: Учеб. пособие / АббасовМ.Э. — СПб.: Издательство “ВВМ”, 2014. – С. 64.

11 Унимодальная функция. - URL:http://ивтб.рф/exams/%D1%82%D0%BF%D1%80/2.4.htm