«Сейфуллин оқулары – 18: « Жастар және ғылым – болашаққа көзқарас» халықаралық ғылыми - практикалық конференция материалдары = Материалы международной научно-практической конференции «Сейфуллинские чтения – 18: « Молодежь и наука – взгляд в будущее» - 2022.- Т.II, Ч.II. – С.253-256

ТРИ ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Кенжебек Ф., студент 4 курса
Казахский агротехнический университет им. С. Сейфуллина, г. Нур-Султан

Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов называется комбинаторикой.

В настоящее время комбинаторика является одним из важных разделов математической науки. Ее методы широко используются для решения практических и теоретических задач. Установлены связи комбинаторики с другими разделами математики.

Содержание комбинаторной геометрии не очерчено пока сколько-нибудь отчётливо. Этот термин, по - видимому, впервые был предложен замечательным швейцарским геометром Гуго Хадвигером. Прилагательное «комбинаторная» в названии нового раздела геометрии подчеркивает широкое использование здесь чисто комбинаторных соображений, связанных с целыми числами. Весьма важной чертой комбинаторной геометрии является её удивительная наглядность, выражающаяся в чрезвычайной простоте большинства результатов, опирающихся лишь на самые элементарные представления. Впрочем, эта простота формулировок теорем и используемых в их доказательствах средств вовсе не означает тривиальности; большинство относящихся к комбинаторной геометрии предложений являются глубоко неочевидными, иногда даже неожиданными. Это соединениеэлементарности и глубины больше всего привлекают в комбинаторной геометрии [1].

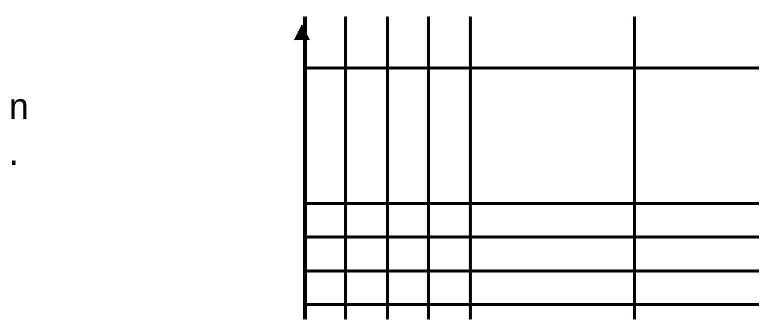
Лемма Бернсайда

Пусть л(б) – число неподвижных точек перестановки б, t(G) – число орбит группы перестановок G={e=б0, б1, …, бk-1}, действующей на множестве M={1, 2, …, n}. Тогда для любой группы перестановок имеет место равенство:

$$t(G)=\frac{1}{|G|}\sum \; л(б), \qquad \text{где } б\in G.$$

Доказательство. Рассмотрим отношение «перестановка б сохраняет неподвижным элемент m» между перестановками группы G и элементами множества M. Сопоставим парам (б, m), б ∈ G, m M, вершины прямоугольной сети и отметим те из них, для ко- торых соответствующая пара (б, m) находится в указанном отношении, то есть б(m)=m (рис. 1)

Иными словами, построим график указанного отношения [2].



б0 б1 б2 б3 . . . бk-1

Рисунок 1

Число отмеченных точек (точек, принадлежащих графику) можно подсчитать двумяспособами: определить число отмеченных точек на каждой вертикали и просуммироватьполученные величины или же определить число таких точек на каждой горизонтали и вычислить их сумму. Согласно определению отношения на каждой вертикали отмечаются все точки, сохраняемые перестановкой б, соответствующей этой вертикали. Их число равно л(б). Поэтому число всех точек графика равно

л(б0) + л(б1) + … +л(бk-1)= ∑ л(б), где б ∈ G.

С другой стороны, на каждой горизонтали отмечаются все перестановки, сохраняющие элемент m∈ M, отвечающий этой горизонтали. А такие перестановки образуютгруппу Gm – стабилизатор элемента m, - и их число, по теореме, доказанной ранее, равно

|Gm|=|G|:|O(m)|. Поэтому при втором способе подсчёта числа отмеченных точек графикарассматриваемого отношения получаем выражение |G1| + |G2| + … + |Gn| = ∑ |Gm |(m ∈ M).

Однако, если элементы i, j ∈ M содержатся в одной орбите, то O(i)=O(j), и поэтому

|Gi|=|G|:|O(i)|=|G|:|O(j)|=|Gj|. Пусть O1, O2, …, Ot – все орбиты группы G такие, что M = O1, YO2 YK YO$_t$, и слагаемые в этом объединении не пересекаются. Разобьём ∑ |Gm | (гдеm∈ M) на части так, чтобы внутри каждой из этих частей суммирование шло по элемен-там некоторой орбиты:

$$\sum_{m\in M}|G_m| = \sum_{m\in O_1}|G_m| + \sum_{m\in O_2}|G_m| + \ldots + \sum_{m\in O_t}|G_m|.$$

Каждое из t слагаемых в правой части этого равенства можно преобразовать следую-щим образом:

$$\sum_{m\in O}|G_{\mathrm{m}}| = \sum_{m\in O}\frac{|G|}{|O(m)|} = \frac{|G|}{|O|}\sum_{m\in O}1 = \frac{|G|}{|O|}|O| = |G|.$$

Поэтому $\sum|G_{\mathrm{m}}| = |G| + \ldots + |G| = t\cdot|G|$.

Таким образом, при втором способе подсчёта мы получили t·|G| отмеченных точек графика. Приравнивая величины, полученные при первом и втором способах, получим [3]

, $$t|G| = \sum_{\alpha\in G}\lambda(\alpha)$$

то есть $t = t(G) = \frac{1}{|G|}\cdot\sum_{\alpha\in G}\lambda(\alpha)$

Лемма доказана.

Приведем несколько примеров.

Задача 1. Сколько различных ожерелий можно составить из двух синих, двух белых идвух красных бусин?

Решение. Переформулируем задачу так: сколькими геометрически различными способами можно раскрасить вершины правильного шестиугольника так, чтобы две были синего цвета, две – белого, две – красного? а) Вокруг центра шестиугольника имеется пять поворотов на углы $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. Им соответствуют перестановки:

1) (1, 2, 3, 4, 5, 6); 2) (1, 3, 5) (2, 4, 6); 3) (1, 4) (2, 5) (3, 6); 4) (1, 5, 3) (2, 6, 4) 5) (1, 6, 5, 4, 3, 2)

б) Имеется три симметрии относительно осей, соединяющих противоположные вершины правильного шестиугольника. Им соответствуют перестановки:

6) (1) (4) (2, 6) (3, 5); 7) (2) (5) (3, 1) (4, 6); 8) (3) (6) (2, 4) (1, 5)

в) Имеется три симметрии относительно осей, соединяющих середины противоположных сторон правильного шестиугольника. Им соответствуют перестановки: 9) (1, 2) (6, 3) (5, 4); 10) (1, 6) (2, 5) (3, 4); 11) (2, 3) (1, 4) (6, 5)

Вместе с тождественной перестановкой (1) (2) (3) (4) (5) (6) получаем 12 перестановок – все элементы группы G. Итак, в группе G имеется:

перестановка типа <1, 1, 1, 1, 1, 1>,

перестановки типа <6>,

2 перестановки типа <3, 3>,

4 перестановки типа <2, 2, 2>,

3 перестановки типа <1, 1, 2, 2>.

Определим количество неподвижных точек для перестановок каждого типа. Так как количество различных цветов, в которые нужно раскрасить шестиугольник, равно трём, то минимальное количество циклов в перестановке должно быть равно трём, чтобы она имела неподвижные точки. То есть перестановк вижных точек не

$$\tilde{P}_3^6 = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$$

имеют. Для перестановки первого типа получим неподвижных то- чек. Для каждой перестановки типа <2, 2, 2> по принципу умножения получаем по P3

=3·2·1= 6 неподвижных точек. Для каждой перестановки типа <1, 1, 2, 2> по принципу олучим по P3 =3·2·1·1= 6 неподвижных точек. Применим лемму Бернсайда: $l(\tilde{G}) = \frac{1}{12}$(1·90+ 4·6+ 3·6) = 11.

Итак, 11 различных ожерелий можно составить из двух синих, двух белых, двух красных бусин [4].

Задача 2. Сколькими геометрически различными способами три абсолютно одинако-вые мухи могут усесться в вершинах правильного пятиугольника?

Решение. Обозначим M – множество различных способов расположения трёх рщинах пятиугольника, если вершины занумерованы. Тогда способов $|M| = P_2(3, 2) = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$ расположения мух, где 2 – количество элементов мно-

жества M1 = {м, с} (где м – муха, с – свободная вершина),3, 2 – кратности соответственно м и с.

а) Вокруг центра пятиугольника имеется четыре поворота $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{5\pi}{5}$

. Им соответствуют перестановки:

1) (1, 2, 3, 4, 5); 2) (1, 3, 5, 2, 4); 3) (1, 4, 2, 5, 3); 4) (1, 5, 4, 3, 2)

б) Имеется пять симметрий относительно осей, соединяющих вершины пятиугольника с серединами противоположных сторон. Им соответствуют перестановки:

5) (1) (2, 5) (3, 4); 6) (2) (1, 3) (5, 4); 7) (3) (2, 4) (1, 5); 8) (4) (3, 5) (2, 1); 9) (5) (1, 4) (2, 3),

где 1, 2, 3, 4, 5 – числа, с помощью которых занумерованы вершины пятиугольника. Вместе с тождественной перестановкой (1)(2)(3)(4)(5) имеем 10 элементов группы G. Итак, в группе G имеется:

1 перестановка типа <1, 1, 1, 1, 1>,

перестановки типа <5>,

перестановок типа <1, 2, 2>.

Определим количество неподвижных точек для перестановок каждого типа. Чтобы перестановка имела неподвижные точки, минимальное количество циклов в перестановке должно быть равно двум, так как множество M1 состоит из двух элементов м и с. Поэтому перестановки 1) – 4) не им е . Тогда для перестановки

типа <1, 1, 1, 1, 1> имеем по формуле: $\widetilde{P}_2^5(3,2)=\frac{5!}{3!\,2!}=10$ неподвижных точек. Для каждой перестановки типа <1, 2, 2> получим по п ринципу умножения P2 =2·1·1= 2 не-

подвижные точки. По лемме Бернсайда получаем $t(\widetilde{G})=\frac{1}{10}(1\cdot 10+5\cdot 2)=2$.

Итак, двумя геометрически различными способами три одинаковые мухи могутусесться в вершинах правильного пятиугольника.

Задача 3. Сколькими способами можно раскрасить вершины куба в два цвета (красный и синий) так, чтобы вершин каждого цвета было поровну?

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся задачей 1. Пусть M – множествовсевозможных по-разному раскрашенных кубов одного размера, положение которых

в пространстве фиксировано. Тогда по формуле $\widetilde{P}_n^k(k_1, k_2, \ldots, k_n)=\frac{k!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$

получим $|M|=\widetilde{P}_2^8(4,4)=\frac{8!}{4!\,4!}=70$ по-разному раскрашенных кубов. Так как нам нужно раскрасить

вершины в два цвета (4 - в красный, 4 - в синий), то минимальное количество циклов в перестановке должно быть равно двум. Поэтому все перестановки 1) – 24) (задача 1) имеют неподвижные точки. В результате в группе G имеется:

1 перестановка типа <1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1>,

перестановок типа <4, 4>,

9 перестановок типа <2, 2, 2, 2>,

8 перестановок типа <1, 1, 3, 3>.

Тогда перестановка типа <1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1> имеет $\widetilde{P}_2^8(4,4)=\frac{8!}{4!\,4!}=70$ непод- вижных точек. Каждая перестановка типа <4, 4> имеет (по принципу умножения P2 =2·1= 2 неподвижные точки. Для каждой перестановки типа <2, 2, 2, 2> имеется $\widetilde{P}_2^4(2,2)=\frac{4!}{2!\,2!}=6$

неподвижных точек. Каждая перестановка типа <1, 1, 3, 3> имеет (по принципу умножения) P2 =2·1·2·1= 4 неподвижные точки. По лемме Бернсайда получаем

$$t(\widetilde{G})=\frac{1}{24}(1\cdot 70+6\cdot 2+9\cdot 6+8\cdot 4)=7.$$

Итак, семью способами можно раскрасить вершины куба в два цвета так, чтобы вершин каждого цвета было поровну.

Как говорилось ранее, задачи комбинаторной геометрии доступны пониманию школьников старших классов и в то же время представляют интерес для специалистов

математиков, поэтому разобранный в работе материал, можно использовать для проведения математического кружка, как в школе, так и в университете. Хочется отметить, что дальнейшее развитие комбинаторной геометрии в скором времени приведёт к контакту между школьной математикой и научными исследованиями [5].

Список использованной литературы

1 Болтянский В.Г, Гохберг И.Ц. «Теоремы и задачи комбинаторной геометрии»,1965.

2 Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. «Геометрические оценки и задачи изкомбинаторной геометрии», 1974.

3 Хадвигер Г., Дебруннер Г. «Комбинаторная геометрия плоскости», 1965г.

4 Грюнбаум Б. «Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел». М.,1971.

5 DOI 10.17223/20710410/33/1 A CHARACTERIZATION OF MATROIDS IN TERMSOF SURFACES A. V. Il'ev*, V. P. Il'ev**'*** *Sobolev Institute.