«Сейфуллин оқулары – 18: « Жастар және ғылым – болашаққа көзқарас» халықаралық ғылыми -практикалық конференция материалдары = Материалы международной научно-практической конференции «Сейфуллинские чтения – 18: « Молодежь и наука – взгляд в будущее» - 2022.- Т.II, Ч.II. – Б.250-252

ЕКІЛІК САНАУ ЖҮЙЕСІНДЕ КОЛЛАТЦ ГИПОТЕЗАСЫНЫҢДЕРБЕС ЖАҒДАЙЫН ҚАРАСТЫРУ

Р. Қажымова, студент
С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті, Нұр-Сұлтан қ.

Натурал сандар ежелден белгілі және де көптеген ғылыми пәндерде қарастырылады.Коллатц гипотезасы кез-келген натурал санды белгілі бір мәндерге ие элементтердің белгілі бір тізбегіне айналдыру мүмкіндігі туралы идеяны қалыптастырады.

Коллатц гипотезасы (Сиракуз немесе мәселесі) — математиканың шешілмеген мәселелерінің бірі, оны 1937 жылы неміс математигі Лотар Коллатц ұсынған, сол себептісол ғалымның есімімен атайды [4], [5].

Натурал сандар үшін Коллатц функциясы келесі түрде анықталады[6] :

$$C(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{егер } n - \text{жұп} \\ 3n+1, & \text{егер } n - \text{тақ} \end{cases}$$

Кез келген *n* натурал санын аламыз, егер ол жұп болса, оны 2-ге бөлеміз, ал тақ болса,3-ке көбейтіп, 1-ді қосамыз (-ді аламыз). Алынған санға тағы да осындай амал орындаймыз және т.б., бұл процесс шексіз қайталана береді.

Гипотеза шарты бойынша есептеуді 1- артық кез-келген натурал саннан бастауға болады. Дегенмен, тақ саннан бастау тиімдірек екені анық, өйткені кез-келген жұп сан 2-гебөлгенде (бір немесе бірнеше рет) тақ санға айналады [5].

Мысалы,

7 – тақ сан, $7\times3+1=22$
22 – жұп сан, $22:2=11$
11 – тақ сан, $11\times3+1=34$
34 - жұп сан, $34:2=17$
17 - тақ сан, $17\times3+1=52$
52 - жұп сан, $52:2=26$
26 - жұп сан, $26:2=13$
13 - тақ сан, $13\times3+1=40$
40 - жұп сан, $40:2=20$
20 - жұп сан, $20:2=10$
10 - жұп сан, $10:2=5$
5 - тақ сан, $5\times3+1=16$
16 - жұп сан, $16:2=8$
8 - жұп сан, $8:2=4$
4 - жұп сан, $4:2=2$
2 - жұп сан, $2:2=1$
1 - тақ сан, $1\times3+1=4$

Бұл ереже әртүрлі сандармен де орындалды, сонда 1>4>2>1>4>2...

цикліне келеді және бұл цикл қайталана береді.

Коллатц гипотезасы: қандай да бір саннан бастасақ та, бәрібір де соңында 1 – ді пайда болады деп тұжырым жасалады. Қазіргі уақытта барлық алынған сандар үшін Коллатцгипотезасы орындалады[2] .

Мынадай анықтамаларды пысықтап кетейік:

Үшке көбейту және бірді қосудың бір амамлы«итерация» деп атайық.

Сан тақ (немесе бір) болғанша бір немесе бірнеше екіге бөлуді амалын«қысқарту» деп атаймыз.

Коллатц гипотезасына сәйкестігі тексерілетін санды «бастапқы сан» деп атаймыз. Бірге жеткенше дейінгі, бастапқы сан өтетін санды «шығу саны» деп атаймыз [4].

Гипотезаға екілік сандық жүйені қолдану: Егер де сандарды екілік санау жүйесінде жазсақ, онда итерация мен қысқарту жүйеліктері арқылы 1-ге жету амалын қасқартуға болады. Сонымен, жүйелі қысқартулар нәтижесінде 1-ге жететін сан 2^n түрінде жазылады. Яғни, мысалы, 1000002 немесе сол сияқты, 3210. Бірақ үлкен сандар жағдайында бұл көрініс айқын болады.

Екілік санау жүйесінде 3_{10} – ға көбейту оңайырақ, бұл көбейту 112 – ге көбейтуі, яғнибастапқы санға 1 разряд солға жылжытылған сондай санды қосу.

Мысалы, 32_{10} санын 3_{10} – ға көбейту екілік жүйеде былай орындалады:

$$
\begin{array}{r}
+\,1000000 \\
\underline{1000000} \\
11000000
\end{array}
$$

Гипотезаның дербес шешімі: Кері талқылау арқылы қарастырайық.Бастапқы сан біргекелуі үшін, ол сан 2^n түрінде жазылуы керек. Алдымен, оны 1-ге азайтып, 310 -ға бөлу керек. Яғни, алдымен сан *2n-1* (3-ке бөлінетін) немесе екілік жүйеде (мысалы): 11111111 (255_{10}) жазылуы керек.

Ескерту: алдағы уақытта 310 – ға бөлгенде разрядтар саны жұп болады. Сонымен, 3_{10}

(немесе 112) бөлу арқылы бастапқы 1010101 (85_{10}) екілік санын аламыз.

1010101-ді 3_{10}-ға (112) кері көбейту арқылы тексеру оңай:

$$
\begin{array}{r}
+1010101 \\
\underline{1010101} \\
11111111
\end{array}
\quad 2^n - 1 - \text{ мәні пайда болды.}
$$

Енді бастапқы (2n-1)/3 санына қайта оралайық. Бұл сан келесі шарттарды қанағаттандырады: разрядтардың жалпы саны тақ, ал үлкен және кіші разрядтар 1-ден тұрады, аралық разрядтар ..01.. деп кезектеседі.

Қорытындылай келе, біз Коллатц гипотезасын қанағаттандыратын шексіз сандарқатарын аламыз: 1 (n=0); 102 (n=2, қысқартудан кейін сан (1) - ші қатардың келесі санынакеледі); 1012 ; 10102 ; 101012 …

Бұған дейін бастапқы сан 2-ге бөлінуі мүмкін, яғни үлкен разрядтарында қосымша қаншама нөлдер саны болуы (екілік түрі 101...0100..00) немесе бұл сан алдыңғы итерацияның нәтижесі болуы мүмкін, бірақ та ол маңызды емес.

Гипотезаның алғашқы дербес шешімінің шығуын қарастырайық.$2^n+2^{n-2}+ 2^{n-4}+...+ 2^{n-2k}$ саны Коллатц гипотезасын қанағаттандырады. Сонымен қатар, бұл сан 1-ге дейін бір итерацияға азаяды. *n* дәреже өлшемі және жұптығы маңызды емес, басты шарт – дәрежелердің 2-ден *n-2k* дейін біртіндеп кемуі. *n-2k* мәні санның кіші разряды да үлкен разряды да болуы мүмкін ($k = 0$ болса, сан 2^n түріне келеді).

Мысалы, 28 + 26 + 24 сандары үшін:

100000000 (256_{10})
1000000 (64_{10})
10000 (16_{10})
101010000 (336_{10})

Әрі қарай, төрт қысқартудың нәтижесінде сан 10101 (21_{10}) екілік түріне келеді, онда тақ разрядтар 1 және 0 болып ауысып отырады. 112 – ге көбейтуден кейін:

+10101
10101
111111

1-ді қосқаннан кейін сан 1000000-ға келеді, содан кейін ол 6 рет 2-ге бөлінеді (1-ге дейін қысқарады), осыны дәлелдеу керек еді.

Қорытынды: Шексіз сандар қатары үшін Коллатц гипотезасының жеке шешімдері қаралды. Жұмыстың өзектілігі - шешілмеген математикалық есептердің бірі ретінде барлық натурал сандар үшін Коллатц гипотезасын дәлелдеу[3]. 2021 жылғы сәуірдегі жағдай бойынша 9 789 690 303 392 599 179 036-дан кіші барлық натурал сандар тексерілді және олардың әрқайсысы қандай да бір қадамдардарда Коллатц гипотезасының шартта-рына сәйкес келді.

Коллатц гипотезасының әзірге ешкім оның логикалық дәлелін таба алмады, сол себепті ол гипотеза деп аталады. Лотар Коллатц өзінің гипотезасын 20 ғасырдың 30-жылдарындатұжырымдады және содан бері бұл тұжырымды қатаң математикалық логика арқылы дәлелдеуге немесе жоққа шығаруға көптеген әрекеттер жасалды. Бірақ математиктердіңқол жеткізген нәтижесі — гипотезаны эксперименталды түрде тексеру болды.

Гипотезаны ешқандай математик ғалымдар жоққа шығарған жоқ, бірақ та осы уақыттадейін үлкен бастапқы сандар үшін ерте ме, кеш пе алгоритм 1-ге жететіне көз жеткізді. Бұл мәселені шешу үшін, ерікті есептеулер жобасы ұйымдастырылды, бірақ классикалық математика да бұл жеткіліксіз. Кейбір бастапқы үлкен сандардың арасында гипотеза расталмайтын ізделінді санды жасырынып тұруы мүмкін.

Заманауи уақытта Коллатц гипотезасында тағы бірнеше танымал атаулары бар:

3n+1 дилеммасы - тақ сандарға арналған қадам;

градина гипотезасы - атмосферадағы бұршақ траекториясын еске түсіретін бірізділікграфик;

Улам гипотезасы - поляк математигі Станислав Уламның атымен аталған;

Какутани мәселесі-жапон математигі Сидзуо Какутани атымен аталған;

Туэйтс гипотезасы - ағылшын математигі Брайн Туэттің атымен аталған;

Хассе алгоритмі -неміс математигі Хельмут Хассе атымен аталған;

Сиракуз мәселесі.

Бұл гипотезада сандар өте таңқаларлық жағдай жасайды: кейбір жағдайларда 1-ге есептеулер өте тез жетеді, ал кейде аралық нәтиже өте үлкен санға дейін жетеді, содан кейін төмендеп 1-ге дейін тез жетеді. Мысалы, бастапқы 27 саны үшін аралық жиынтық9232-ге жетеді, содан кейін бірнеше қадаммен ол 1-ге тез түседі. Нәтижесінде 27 үшін қадамдар саны-111. Бұл 26 үшін 10 (максималды аралық сан — 40), ал 28 үшін — 18 (максималды аралық сан — 52)[7].

Математиктер гипотезаны толығымен логикалық түрде растай немесе жоққа шығара алмаса да, олар біраз мәселенені шешуге қол жеткізді. Әдеттегідей, ғалымдар біртіндеп, гитотезаның шешімдерін таба бастады. Жақында, 8 қыркүйек 2019, Калифорния университетінің математигі Теренс Тао барлық сандар үшін, гипотезаның "іс жүзінде" "нақты" екендігі туралы дәлелдер жариялады. Болашақта екілік сандық жүйені қолдану идеясын дамытуға болады деп үміттенемін.

Қолданылған әдебиеттер

1 An Automated Approach to the Collatz Conjecture Yolcu, E; Aaronson, S and Heule, MJH 28th International Conference on Automated Deduction (CADE) 2021 | AUTOMATED

DEDUCTION, CADE 28 12699 , pp.468-484

https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000693448800027

2 J. C. Lagarias, The Ultimate Challenge: The 3x+1 Problem, American Mathematical Society, 2010.

3 Открытие математические проблемы/ Открытие математические проблемы(17.07.2021) https://ru.wikipedia.org/wiki

4 Гипотеза Коллатца/Гипотеза Коллатца (дата обращения 17.07.2021)

https://ru.wikipedia.org/wiki
5 В.М. Зюзьков. Эксперименты в теории чисел/ ТОМСК «Издательство НТЛ» 2019
6 Султан К.С. Краткое доказательство гипотезы Коллатца. г. Алматы, Казахстан e-mail:kurmetsultan@mail.ru
7 Гитотеза Коллатца – самый математический фокус всех времен. https://tproger.ru/ articles/gipoteza-kollatca-samyj-krutoj-matematicheskij-fokus-vseh-vremjon/