«М.А. Гендельманның 110 жылдығына арналған «Сейфуллин оқулары – 19» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясының материалдары = Материалы международной научно-практической конференции «Сейфуллинские чтения – 19», посвященной 110 - летию М.А. Гендельмана» - 2023.- Т.I, Ч.III.- Б. 171-173.

ӘОЖ 517.51

ЕКІ ЕСЕЛІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ҚАТАРДЫҢ $|C;\bar{\beta}|_{\bar{\lambda}}-$ ҚОСЫНДЫЛАНУЫНЫҢ КЕЙБІР ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТТАРЫ ТУРАЛЫ

Бітімхан С., ф.-м.ғ.к.
«С.Сейфуллина атындағы Қазақ агротехникалық зерттеу университеті» КеАҚ, Астана қ.

Бұл жұмыста тригонометриялық қатарлардың абсолютті жинақталуының жалпыламасы болып саналатын абсолютті қосындылану сұрақтары зерттеледі. Көптеген есептерде жинақсыз қатарларға қосындысы болатын бір санды меншіктеу қажеттілігі туындайды. Осындай әдістердің бірі қатарларды абсолютті қосындылау. Қатарлардың абсолютті қосындылануының анықтамасы алғаш италяндық математик Чезаро бергендіктен кейде Чезаро бойынша қосындылану деп те атайды. Қатарларды Чезаро бойынша қосындылау сұрақтарымен көптеген математиктер айналысып, әртүрлі жалпылауларын алған және зерттеулер қазір де жалғасып жатыр. Ұсынылып отырған жұмыста сондай жалпылаулардың бірі $|C;\bar{\beta}|_{\bar{\lambda}}-$ қосындыланудың шарттары тригонометриялық қатарлар үшін алынған. Бұл әдістің ерекшелігі параметрлерінің барлығы векторлық түрде қатысуында.

R^s - нақты координаталы $\bar{x}=(x_1,\dots,x_s)$ нүктелерінің s -өлшемді евклидтік кеңістігі болсын; ал $I_s=\{\bar{x}\in R^s: 0\le x_j\le 2\pi,\ j=1,2,\dots,s\}-s$ -өлшемді куб болсын.

Келесі белгілеуді енгізейік $\gamma_i(nx)=\begin{cases}\cos nx, & i=1,\\ \sin nx, & i=2\end{cases}$.

Біз мына еселі тригонометриялық қатарды қарастырамыз

$$\sum_{\bar{n}\ge\bar{1}} B_{\bar{n}}(\bar{x})=\sum_{n_1=1}^{\infty}\dots\sum_{n_s=1}^{\infty} B_{n_1,\dots,n_s}(x_1,\dots,x_s), \tag{1}$$

мұндағы $\bar{n}\ge\bar{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ белгісі барлық $j=1,2,\dots,s$ үшін $n_j\ge\alpha_j$ болатынын білдіреді;

$$B_{\bar{n}}(\bar{x})=\sum_{\bar{1}\le\bar{i}\le\bar{2}} a_{\bar{n}}^{(\bar{i})}\cdot\prod_{\nu=1}^{s}\gamma_{i_\nu}(n_\nu x_\nu).$$

Келесі белгілеуді пайдаланамыз $A_n^{(\beta)}=\frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}{n!}$, $\beta\in R$, $n-$ натурал сан.

Мына

$$\sigma_{\bar{n}}^{(\bar{\beta})}(\bar{x})=\sum_{\bar{1}\le\bar{k}\le\bar{n}}\prod_{j=1}^{s}A_{n_j-k_j}^{(\beta_j)}\left(A_{n_j}^{(\beta_j)}\right)^{-1}B_{\bar{k}}(\bar{x})$$

қосындыны (1) қатарының $(C;\bar{\beta})\equiv(C;\beta_1,\ldots,\beta_s)$ ортасы деп атаймыз.

Берілген $b_{\bar{n}}$ саны үшін аралас айырманы келесі түрде анықтаймыз:

$$\Delta b_{\bar{n}}=\sum_{\bar{0}\le\bar{\varepsilon}\le\bar{1}}(-1)^{s-\sum\limits_{i=1}^{s}\varepsilon_i}\cdot b_{\bar{n}-\bar{1}+\bar{\varepsilon}},$$

мұндағы $\bar{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s)$. (1) қатарын $\bar{x}\in I_s$ нүктесінде $|C;\bar{\beta}|_{\bar{\lambda}}$ қосындыланады, $\bar{\lambda}\ge\bar{1}$, дейміз, егер :

$$\sum_{n_s=1}^{+\infty}n_s^{\lambda_s-1}\left[\sum_{n_{s-1}=1}^{+\infty}n_{s-1}^{\lambda_{s-1}-1}\ldots\left[\sum_{n_1=1}^{+\infty}n_1^{\lambda_1-1}\left|\Delta\sigma_{\bar{n}}^{(\bar{\beta})}(\bar{x})\right|^{\lambda_1}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\ldots\right]^{\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}}<+\infty.$$

$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_s=\lambda$ жағдайында $|C;\bar{\beta}|_{\bar{\lambda}}$ орнына $|C;\bar{\beta}|_{\lambda}$ жазуын пайдаланамыз.

Тригонометриялық қатарлардың $|C;\bar{\beta}|_{\lambda}$ -қосындылану шарттарын $\lambda=1$, $s=2$, $0<\beta_j<\frac{1}{2}$, $j=1,2$ жағдайында И.Е.Жак және М.Ф.Тиман [1], ал $f\in L_2(I_s)$ функциясының Фурье қатарының $|C;\bar{\beta}|_{\lambda}$ -қосындылануы сұрақтарын Ю.А.Пономаренко, М.Ф.Тиман [2] зерттесе, бұл сұрақтардың бір өлшемді жағдайдағы шешімдерін табумен И.Салаи [3] айналысқан болатын. Осы тақырыпқа байланысты соңғы бірнеше нәтижелерді [4], [5] мақалаларынан көруге болады.

Біз $L_q(I_s)$ арқылы Лебег бойынша өлшемді, әрбір айнымалысы бойынша 2π -периодты және $\|f\|_q=\left(\int\limits_{I_s}|f(\bar{x})|^q d\bar{x}\right)^{\frac{1}{q}}<+\infty$, $1\le q<+\infty$ шартын қанағаттандыратын барлық $f(\bar{x})$ функцияларының кеңістігін белгілейміз.

$\rho_{\bar{k}}=\sqrt{\sum\limits_{\bar{1}\le\bar{i}\le\bar{2}}|a_{\bar{k}}^{(\bar{i})}|^2}$ болсын. Сонымен бірге, $Y_{n_1,\ldots,n_s}(f)_q-$ арқылы $f\in L_q(I_s)$ функциясының s -өлшемді ең жақсы «бұрышпен» жуықтауын белгілейміз (қара. [6]); $\Omega_r(f;t_1,\ldots,t_s)_q-$ символы $f\in L_q(I_s)$ функциясының реті r ($r-$ натурал сан) болатын аралас тегістік модулін білдіреді.

Біз келесі теоремаларды дәлелдедік:

Теорема 1. $1 < q \le 2,\ 1 \le \lambda_2 \le \lambda_1 \le q,\ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ *болсын. Онда* $f \in L_q(I_2)$ *функциясының Фурье қатары* I_2 *кубында барлық жерде дерлік* $|C;\bar{\beta}|_{\bar{\lambda}}$ *- қосындылануы үшін,* $-1 < \beta_2 < \frac{1}{q'}$, $\frac{1}{q'} < \beta_1 < +\infty$ *жағдайында келесі шарттың орындалуы жеткілікті:*

$$\sum_{n_2=1}^{+\infty} n_2^{\lambda_2(\frac{1}{q}-\beta_2)-1} \left[\sum_{n_1=1}^{+\infty} n_1^{\lambda_1(\frac{2}{q}-1)-1} Y_{n_1,n_2}^{\lambda_1}(f)_q \right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} < +\infty .$$

Бұдан басқа мына жағдайларда да тиісті нәтижелер алынды: 2) $\beta_2 = \frac{1}{q'}$, $\frac{1}{q'} < \beta_1 < +\infty$; $\beta_2 = \frac{1}{q'}$, $-1 < \beta_1 < \frac{1}{q'}$.

Теорема 2. $1 < q \le 2,\ 1 \le \lambda_2 \le \lambda_1 \le q,\ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ *және* $r-$ *натурал сан. Онда* $f \in L_q(I_2)$ *функциясының Фурье қатары* I_2 *кубында барлық жерде дерлік* $|C;\bar{\beta}|_{\bar{\lambda}}$ *- қосындылануы үшін,* $\beta_2 = \frac{1}{q'}$, $-1 < \beta_1 < \frac{1}{q'}$ *жағдайында келесі шарттың орындалуы жеткілікті:*

$$\sum_{n_2=1}^{+\infty} (\ln n_2)^{\frac{\lambda_2}{q}} \cdot n_2^{\lambda_2(\frac{2}{q}-1)-1} \left[\sum_{n_1=1}^{+\infty} n_1^{\lambda_1(\frac{1}{q}-\beta_1)-1} \Omega_r^{\lambda_1}(f; \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2})_q \right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} < +\infty .$$

Бұдан басқа мына жағдайларда да тиісті нәтижелер алынды: $-1 < \beta_2 < \frac{1}{q'}$, $\frac{1}{q'} < \beta_1 < +\infty$ және $\beta_2 = \frac{1}{q'}$, $\frac{1}{q'} < \beta_1 < +\infty$.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Жак И.Е., Тиман М.Ф. О суммировании двойных рядов. // Мат. сборник. -1954. –т.35(77). -№1. –С.21-56.

2. Тиман М.Ф., Пономаренко Ю.А. Об абсолютной суммируемости кратных рядов Фурье. // Укр. мат. жур.-1971. –т.23. -№3. –С.346-361.

3. Салаи И. Об абсолютной суммируемости тригонометрических рядов. // Мат. заметки. -1981. –т.39. -№6. –С.823-837.

4. Битимхан С. Об условиях абсолютной чезаровской суммируемости кратных тригонометрических рядов Фурье. // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2019. - Т. 25. - №:2. –С. 42–47.

5. Bitimkhan S., Alibieva D.T. Absolute Cesaro summability conditions for double trigonometric series. // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 2, pp. 337–344.

6. Потапов М.К. Теоремы Харди-Литтлвуда, Марцинкевича-Литтлвуда-Пэли, приближение «углом» и вложение некоторых классов функций. // Math., 1972, v.14(37), №2, p.339-362.