«М.А. Гендельманның 110 жылдығына арналған «Сейфуллин оқулары – 19» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясының материалдары = Материалы международной научно-практической конференции «Сейфуллинские чтения – 19», посвященной 110 - летию М.А. Гендельмана» - 2023.- Т.I, Ч.III.- Б. 177-180.

ӘОЖ 517.926(045)

КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ ТҰРАҚТЫ N- ШІ РЕТТІ БІРТЕКТІ СЫЗЫҚТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ЖАЛПЫ ШЕШІМІН ТАБУ ЖОЛДАРЫНЫҢ БІРІ

Тілепиев Мұрат Шәпенұлы, доцент, ф.-м.ғ. к.,
Уразмагамбетова Элеонора Ұзакбайқызы, доцент, ф.-м.ғ. к.,
Берікханова Гүлсара Ежеханқызы, аға оқытушы, п.ғ.к.,
Дюсембаева Лаззат Қайратқызы, аға оқытушы, магистр
«С.Сейфуллина атындағы Қазақ агротехникалық зерттеу университеті» КеАҚ, Астана қ.

Бұл жұмыс теңдеудің ретін төмендету арқылы коэффициенттері тұрақты *n*-ші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін зерттеуге арналған. Бүгінгі күні біртекті және біртекті емес коэффициенттері тұрақты *n*-ші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімдерін табудың көптеген әдістері бар. Бұл мақалада коэффициенттері тұрақты *n*-ші ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеуінің сипаттама теңдеуінің шешімдеріне байланысты дифференциалдық теңдеудің ретін төмендету арқылы жалпы шешімін табудың жаңа әдісі ұсынылған.

Коэффициенттері тұрақты *n*-ші ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеуі [1]

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (1)$$

берілсін, мұндағы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ -нақты сандар.
Онда (1) теңдеуінің сипаттама теңдеуі

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0. \qquad (2)$$

болады.

Егер $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n-2}, k_{n-1}, k_n$ - (2) теңдеуінің түбірлері болса, онда

[illegible] (3)

теңдіктері орындалады. Онда (1) теңдеуін (3)-ті пайдаланып былай жазуға болады [3]

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)}-\left(k_1+k_2+k_3+\ldots+k_{n-2}+k_{n-1}+k_n\right)y^{(n-1)}+\\
&+\left(k_1k_2+k_1k_3+k_1k_4+\ldots+k_{n-2}k_{n-1}+k_{n-1}k_n\right)y^{(n-2)}+\\
&-\left(k_1k_2k_3+k_1k_2k_4+k_1k_2k_5+\ldots+k_{n-3}k_{n-2}k_{n-1}+k_{n-2}k_{n-1}k_n\right)y^{(n-3)}+\ldots+\\
&+(-1)^{n-1}\left(k_1k_2k_3\cdot\ldots\cdot k_{n-2}k_{n-1}+\ldots+k_2k_3\cdot\ldots\cdot k_{n-2}k_{n-1}k_n\right)y'+\\
&+(-1)^n k_1k_2k_3\cdot\ldots\cdot k_{n-2}k_{n-1}k_n\, y=0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

немесе

$$
\begin{aligned}
&\left(y'-k_ny\right)^{(n-1)}-\left(k_1+k_2+k_3+\ldots+k_{n-1}\right)\left(y'-k_ny\right)^{(n-2)}+\\
&+\left(k_1k_2+k_1k_3+\ldots+k_{n-2}k_{n-1}\right)\left(y'-k_ny\right)^{(n-3)}+\\
&-\left(k_1k_2k_3+k_1k_2k_4+\ldots+k_{n-3}k_{n-2}k_{n-1}\right)\left(y'-k_ny\right)^{(n-4)}+\ldots+\\
&+(-1)^{n-2}\left(k_1k_2k_3\cdot\ldots\cdot k_{n-2}+\ldots+k_3k_4k_5\cdot\ldots\cdot k_{n-2}k_{n-1}\right)\left(y'-k_ny\right)'+\\
&+(-1)^{n-1}k_1k_2\cdot\ldots\cdot k_{n-2}k_{n-1}\left(y'-k_ny\right)=0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

жаңа айнымалы енгізейік

$$y'-k_ny=z_{n-1} \tag{6}$$

Онда (5) теңдеуін жаңа айнымалы арқылы

$$
\begin{aligned}
&z_{n-1}^{(n-1)}-\left(k_1+k_2+\ldots+k_{n-2}+k_{n-1}\right)z_{n-1}^{(n-2)}+\left(k_1k_2+k_1k_3+\ldots+k_{n-2}k_{n-1}\right)z_{n-1}^{(n-3)}+\\
&-\left(k_1k_2k_3+k_1k_2k_4+\ldots+k_{n-3}k_{n-2}k_{n-1}\right)z_{n-1}^{(n-4)}+\ldots+\\
&+(-1)^{n-2}\left(k_1k_2k_3\cdot\ldots\cdot k_{n-2}+\ldots+k_2k_3k_4\cdot\ldots\cdot k_{n-3}k_{n-2}k_{n-1}\right)z'_{n-1}+\\
&+(-1)^{n-1}k_1k_2k_3\cdot\ldots\cdot k_{n-2}k_{n-1}\,z_{n-1}=0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

деп жазуға болады.

Сонымен (1) теңдеуіне қарағанда реті бірге кем болатын коэффициенттері тұрақты (n-1)-ші ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеуін аламыз [4].

Ары қарай (7) түрлендірсек, онда [5]

$$
\begin{aligned}
&\left(z'_{n-1}-k_{n-1}z_{n-1}\right)^{(n-2)}-\left(k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}+k_{n-2}\right)\left(z'_{n-1}-k_{n-1}z_{n-1}\right)^{(n-3)}+\\
&+\left(k_1k_2+k_1k_3+\ldots+k_{n-3}k_{n-2}\right)\left(z'_{n-1}-k_{n-1}z_{n-1}\right)^{(n-4)}+\\
&-\left(k_1k_2k_3+k_1k_2k_4+\ldots+k_{n-4}k_{n-3}k_{n-2}\right)\left(z'_{n-1}-k_{n-1}z_{n-1}\right)^{(n-5)}+\ldots+\\
&+(-1)^{n-3}\left(k_1k_2k_3\cdot\ldots\cdot k_{n-3}+\ldots+k_3k_4k_5\cdot\ldots\cdot k_{n-3}k_{n-2}\right)\left(z'_{n-1}-k_{n-1}z_{n-1}\right)'+\\
&+(-1)^{n-1}k_1k_2k_3\cdot\ldots\cdot k_{n-3}k_{n-2}\left(z'_{n-1}-k_{n-1}z_{n-1}\right)=0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

жаңа айнымалы енгізейік

$$z'_{n-1}-k_{n-1}z_{n-1}=z_{n-2} \tag{9}$$

онда (8) теңдеуін

$$
\begin{aligned}
&z_{n-2}^{(n-2)} - (k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1} + k_{n-2}) z_{n-2}^{(n-3)} + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + \ldots + k_{n-3} k_{n-2}) z_{n-2}^{(n-4)} + \\
&- (k_1 k_2 k_3 + k_1 k_2 k_4 + \ldots + k_{n-4} k_{n-3} k_{n-2}) z_{n-2}^{(n-5)} + \ldots + \\
&+ (-1)^{n-2} (k_1 k_2 k_3 \cdot \ldots \cdot k_{n-3} + \ldots + k_3 k_4 k_5 \cdot \ldots \cdot k_{n-3} k_{n-2}) z'_{n-2} + \\
&+ (-1)^{n-1}\; k_1 k_2 k_3 \cdot \ldots \cdot k_{n-3} k_{n-2}\; z_{n-2} = 0
\end{aligned} \tag{10}
$$

деп жазуға болады.

Сонымен (1) теңдеуіне қарағанда реті екіге кем болатын коэффициенттері тұрақты (n-2) -ші ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеуін алдық.

Осылай дифференциалдық теңдеудің ретін төмендету арқылы төмендегі теңдеулерді аламыз.

$$z'_{n-2} - k_{n-2} z_{n-2} = z_{n-3} \tag{11}$$

$$z'_{n-3} - k_{n-3} z_{n-3} = z_{n-4} \tag{12}$$

...

$$z'_3 - k_3 z_3 = z_2 \tag{13}$$

$$z'_2 - k_2 z_2 = z_1 \tag{14}$$

Соңында

$$z'_1 - k_1 z_1 = 0 \tag{15}$$

бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеуі болады және оның жалпы шешімі [1]

$$z_1 = C_1 e^{k_1 x} \tag{16}$$

Осы функцияны (14) теңдеуіне қойсақ, онда

$$z'_2 - k_2 z_2 = C_1 e^{k_1 x} \tag{17}$$

болады. (17) теңдеуі бірінші ретті біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеу және оның жалпы шешімі [1,2]

$$z_2 = e^{k_1 x}\left(C_1 + \int C_2 e^{k_2 x} \cdot e^{-k_1 x} dx\right)$$

$$z_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_1 x} \int e^{(k_2 - k_1)x} dx \tag{18}$$

Осы функцияны (13) теңдеуіне қойсақ, онда

$$z'_3 - k_3 z_3 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_1 x} \int e^{(k_2 - k_1)x} dx \tag{19}$$

болады. (19) теңдеуі бірінші ретті біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеу және оның жалпы шешімі [1,2]

$$z_3 = e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2\int e^{(k_2-k_1)x}dx + C_3\int e^{(k_2-k_1)x}\left(\int e^{(k_3-k_2)x}dx\right)dx\right)$$

$$z_3 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_1 x}\int e^{(k_2-k_1)x}dx + C_3 e^{k_1 x}\int e^{(k_2-k_1)x}\left(\int e^{(k_3-k_2)x}dx\right)dx \quad ..... \quad (20)$$

Осылай жалғастыра отырып, ең соңында (1) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін аламыз [5].

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_1 x}\int e^{(k_2-k_1)x}dx + C_3 e^{k_1 x}\int e^{(k_2-k_1)x}\left(\int e^{(k_3-k_2)x}dx\right)dx +$$
$$+ C_4 e^{k_1 x}\int e^{(k_2-k_1)x}\left(\int e^{(k_3-k_2)x}\left(\int e^{(k_4-k_3)x}dx\right)dx\right)dx + \ldots +$$
$$+ C_{n-1} e^{k_1 x}\int e^{(k_2-k_1)x}\left(\int e^{(k_3-k_2)x}\left(\int e^{(k_4-k_3)x}\left(\ldots\left(\int e^{(k_{n-1}-k_{n-2})x}dx\right)\ldots\right)dx\right)dx\right)dx +$$
$$+ C_n e^{k_1 x}\int e^{(k_2-k_1)x}\left(\int e^{(k_3-k_2)x}\left(\int e^{(k_4-k_3)x}\left(\ldots\left(\int e^{(k_n-k_{n-1})x}dx\right)\ldots\right)dx\right)dx\right)dx$$

Қорытынды. Бұл мақалада коэффициенттері тұрақты *n*-ші ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін ретін төмендету әдісімен табу жолы көрсетілген.

Пайдаланған әдебиеттер тізімі

1 Д.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1, часть 2, Москва. Айрис ПРЕСС, 2007.

2 С.А.Агафонов, А.Д.Герман, Т.В.Муратова. Дифференциальные уравнения. - МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004.- 348 с.

3 Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. - 2-е изд. - М.: лаборатория Базовых Знаний, 2001 - 344 с:ил.

4 Белайди Б. Быстро растущие решения линейных дифференциальных уравнений с целыми коэффициентами, имеющими одинаковый pv-порядок. J. Математика. ПРИЛОЖЕНИЕ, 2019. Том 42. С. 63-77. http://DOI: 10.7862/rf.2019.4

5 José R. dos Santos Filho, Maurício Fronza da Silva, Global solvability for first order real linear partial differential operators, Journal of Differential Equations, Volume 247, Issue 10, 2009, Pages 2688-2704. https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.08.017